Die Sandzahl des Archimedes

Albert A. Gächter

Etliche glauben, König Gelon, dass die Zahl der Sandkörner unendlich sei. Ich spreche dabei nicht allein vom Sand um Syrakus und im übrigen Sizilien, sondern auch von dem Sande der ganzen bewohnten und unbewohnten Erde. Andere gibt es, die zwar nicht der Ansicht sind, dass die Zahl der Sandkörner unendlich sei, die aber meinen, dass es keine so grosse Zahl gebe, welche die Zahl der Sandkörner übertreffe. Es ist klar, dass die Vertreter dieser Ansicht, wenn sie sich eine Kugel aus Sand vorstellten, so gross wie die Erdkugel, nachdem in dieser die Meere und alle Vertiefungen bis zur Gipfelhöhe der höchsten Berge aufgefüllt wären, um so mehr der Ansicht wären, dass keine Zahl namhaft gemacht werden könne, die grösser wäre als die Zahl der Sandkörner dieser Kugel. Ich aber werde versuchen, dir mit Hilfe von geometrischen Beweisen klar zu machen, dass unter den von uns in den Schriften an Zeuxippos genannten Zahlen etliche vorhanden sind, die nicht nur die Zahl der Sandkörner in jener der Erdkugel gleichen Kugel, von der wir sprachen, übertreffen, sondern auch die Zahl der Sandkörner in einer Kugel, die so gross ist wie der Kosmos. Du bist darüber unterrichtet, dass von den meisten Astronomen als Kosmos die Kugel bezeichnet wird, deren Zentrum der Mittelpunkt der Erde und deren Radius die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Erde und der Sonne ist. Dies nämlich hast du aus den Abhandlungen der Astronomen gehört. Aristarch von Samos gab die Erörterungen gewisser Hypothesen heraus… Wir behaupten nun: Auch wenn wir uns eine Kugel aus Sand, die so gross ist wie die von Aristarch angenommene Fixstern-Sphäre, vorstellen, so lassen sich von den von uns genannten Zahlen solche angeben, die so gross sind, dass sie die Zahl der Sandkörner jener Kugel übertreffen…

In diesen Anfangszeilen aus dem Werk *Die Sandzahl* des grossen Mathematikers Archimedes (287–212 v. Chr.) sind zwei Dinge bemerkenswert:

1. Die interessante, dem König Gelon von Syrakus gewidmete Schrift enthält viel Wissenswertes über die damaligen astronomischen Kenntnisse. Es ist erstaunlich, wie mit grossem Scharfsinn und bescheidenen Instrumenten, mit hervorragender Beobachtungsgabe und kühnen Hypothesen ein harmonisches Weltbild entstanden ist. Aristarch von Samos stellte bereits im 3. Jh. vor Christus die Sonne in den Mittelpunkt und darf deshalb als Kopernikus der Antike bezeichnet werden.

2. Die eigentliche Leistung bestand jedoch im Schaffen neuer Zahlworte und Zahlen, welche die alltäglichen Vorstellungen der Griechen bei weitem überschritten. Was über eine Myriade, d. h. 10 000 hinausging, konnte damals nicht mehr vernünftig benannt und geschrieben werden. So schuf Archimedes ein neues eigentümliches Zahlensystem, welches die Zahlworte, nicht aber die Zahlzeichen für grosse Zahlen lieferte. Auf diesem Weg ging Archimedes haarscharf an den einfachen Regeln für das Rechnen mit grossen Zahlen vorbei. Ihm fehlte sowohl die Zahl Null als auch eine vernünftige abgekürzte Schreibweise, wie sie uns heute geläufig ist.

Die Konstruktion der Sandzahl

Es ist hier nicht der Platz, um ausführlich auf die kunstvollen Abschätzungen und Berechnungen des Archimedes einzugehen. Einige wenige Pinselstriche müssen genügen.

Archimedes startet seine Kette von Schätzungen wie folgt:

Rechts: 25 Mohnkörner.

Es soll ein Raum von Mohnkorngrösse nicht mehr als 10 000 Sandkörner fassen, und es sei der Durchmesser eines Mohnkorns nicht grösser als der 40. Teil einer Fingerbreite. Dies setze ich voraus, nachdem ich folgende Feststellung gemacht habe. Ich legte auf ein glattes Lineal eine geradlinige Reihe einander berührender Mohnkörner und bemerkte, dass 25 Mohnkörner eine Länge, die so gross ist wie die Fingerbreite, erfüllten. Indem ich nun den Durchmesser eines Mohnkornes noch geringer annehme, so setze ich voraus, dass der Mohnkorndurchmesser etwa der 40. Teil einer Fingerbreite ist und nicht geringer, indem ich auf diese Weise einen genügend grossen Sicherheitskoeffizienten herstellen will.

Bereits wird deutlich, dass Archimedes eher Sandstäubchen als Sandkörner im Sinne hat.

Bevor er nun weitere Kugeln mit Sand füllt, konstruiert er sein neues Zahlensystem:

Sand in Hülle und Fülle.

Nun sind zunächst eigene Zahlennamen vorhanden von 1 bis 100 000 000. Es mögen diese Zahlen genannt werden «die Zahlen erster Ordnung». Von diesen Zahlen erster Ordnung wurde die Zahl 100 000 000 genannt «die Einheit der Zahlen zweiter Ordnung». Sie werde mit e_2 bezeichnet. Die Zahl $10 \cdot e_2$ werde Dekade, $100 \cdot e_2$ als Hekatontade, $1000 \cdot e_2$ als Chiliade, $10\,000 \cdot e_2$ als Myriade der Zahlen zweiter Ordnung bezeichnet. Die Zahl $100\,000\,000 \cdot e_2$ werde die «Einheit der Zahlen dritter Ordnung» genannt. Sie werde mit e_3 bezeichnet... So wird weiter fortgeschritten bis zu den Zahlen 100 000 000ster Ordnung. Es genügt nun, die Zahlen bis zu dieser Grenze zu kennen, man kann aber noch weiter gehen.

Es seien nämlich die genannten Zahlen als «Zahlen erster Periode» bezeichnet. Die grösste Zahl der ersten Periode werde die «Einheit der Zahlen erster Ordnung der zweiten Periode» genannt ... und so schreitet man vor bis zu den Zahlen 100 000 000ster Ordnung der 100 000 000sten Periode.

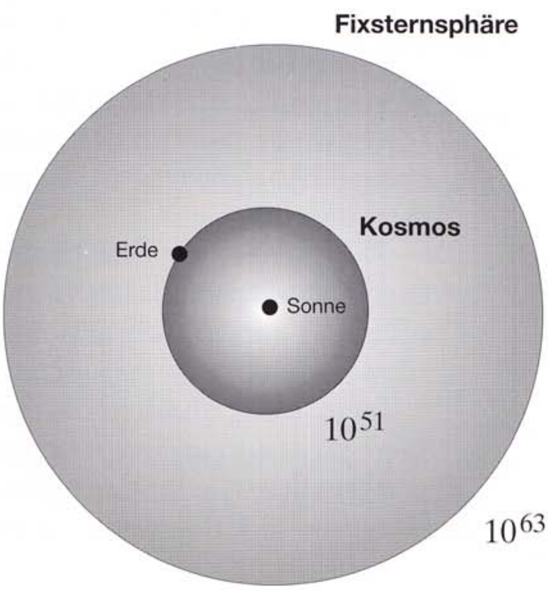
Wenn nun die Zahlen auf diese Weise benannt werden, und es wird eine geometrische Reihe (gemeint ist eine geometrische Folge) *mit dem Anfangsglied 1 und dem Quotienten 10 gebildet, so werden die ersten 8 Glieder dieser Reihe Zahlen erster Ordnung, die nächsten 8 Glieder der Reihe Zahlen zweiter Ordnung...*

Archimedes hat abgeschätzt, dass der Durchmesser des Kosmos sicher kleiner als 10 Milliarden Stadien (1 Stadion = 185 m) ist. In einer Kugel mit dem Durchmesser von einem Stadion sind nach seinen Berechnungen höchstens $100\,000 \cdot e_3$ Sandkörner. Der Kosmos kann demnach nicht mehr als $1000 \cdot e_7$ Sandkörner enthalten. In heutiger Schreibweise sind dies 10^{51}, eine Zahl mit 52 Stellen!

Für die Fixsternsphäre errechnet er 10^{63} Körner. Die grösste von Archimedes als Zugabe konstruierte Zahl geht aber weit darüber hinaus. Sie beläuft sich auf 10 hoch 80 Billiarden. Wahrlich gigantisch! Den Schluss der Abhandlung bilden die zwei folgenden Sätze:

Ich glaube, König Gelon, dass dies der Menge der nicht mathematisch gebildeten Menschen unglaublich erscheinen wird, den mathematisch gebildeten Menschen, die über die Abstände und die Grössenverhältnisse der Erde, der Sonne, des Mondes und des ganzen Weltalls nachgedacht haben, aber keineswegs. Deshalb glaubte ich, dass es auch dir wünschenswert sein würde, dies zu erkennen.

Archimedes träufelt Honig auf die Zunge seines Sponsors!



Der Kosmos und die Fixsternsphäre gemäss Aristarch.