Carlyle: quadratische Gleichung

Albert A. Gächter

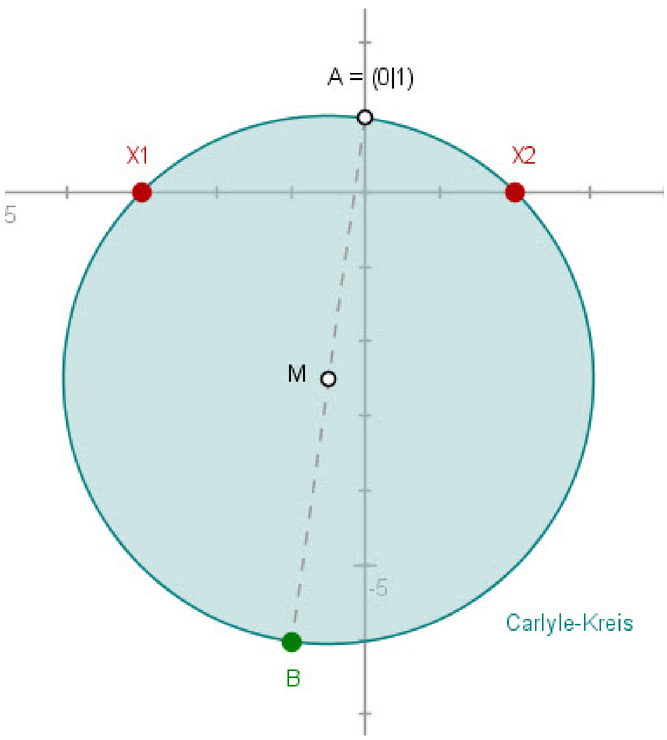
Thomas Carlyle (1795-1881) war ein Schüler von John Leslie, dessen Buch *Elements of Geometry and plane Trigonometry* aus dem Jahre 1817 zu einem Bestseller wurde. Darin schreibt Leslie über die Methode von Carlyle, quadratische Gleichungen zu lösen:

> **This proposition furnishes one of the simplest and most elegant methods for constructing quadratic equations;**

Diesem Urteil kann man nur beistimmen. Etwa 200 Jahre früher hat Descartes in seiner *Geometrie* ein graphisches Verfahren zur Ermittlung der positiven Lösungen einer quadratischen Gleichung angegeben (vergleiche Anhang). Die Fallunterscheidungen machen die Methode etwas schwerfällig. Zudem sind wie bei den Griechen negative Lösungen kein Thema. Ganz anders bei Carlyle.

Graphische Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + bx + c = 0$.
Vorgehen:

1. Wähle eine Einheit und ein Koordinatensystem mit dieser Einheit.
2. Trage die Punkte A(0/1) und B(-b/c) ein.
3. M sei die Mitte der Strecke AB.
4. Zeichne einen Kreis um M mit Radius MA: dies ist der Carlyle-Kreis.
5. Die Punkte, wo der Kreis die x-Achse schneidet, haben als x-Koordinate die Lösungen der quadratischen Gleichung. Berührt der Kreis die x-Achse, sind Doppellösungen vorhanden. In allen anderen Fällen hat die Gleichung keine reellen Lösungen.



Beispiel:

$x^2 + x - 6 = 0$.
b=1; c=-6
A(0/1), B(-1/-6)

Lösungen: 2 und -3

Aktivitäten

1. Experimentiere mit einer DGS und kontrolliere alle möglichen Fälle (zwei verschiedene Lösungen, Doppellösung, keine Lösung).

2. Drücke die Koordinaten des Punktes M mit b und c aus..

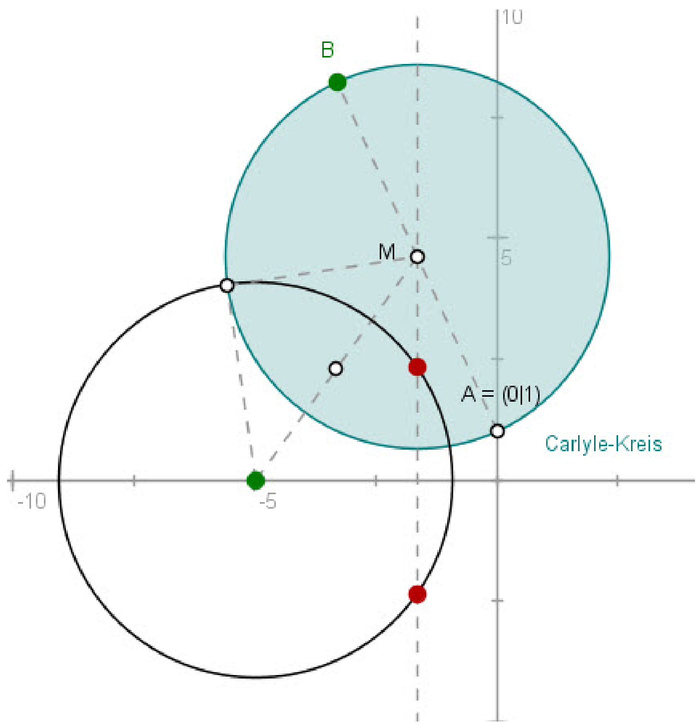
3. Zeige allgemein, dass die Methode von Carlyle die Lösungen einer quadratischen Gleichung liefert.

4. Wie hängt die Anzahl der Lösungen von b und c ab?

5. Suche Informationen im Internet über Thomas Carlyle und John Leslie.

6. Gelingt es auch rückwärts mit der Kenntnis der Lösungen graphisch die Daten für die zugehörige quadratische Gleichung zu bekommen?
   Ziel: Punkt B konstruieren!

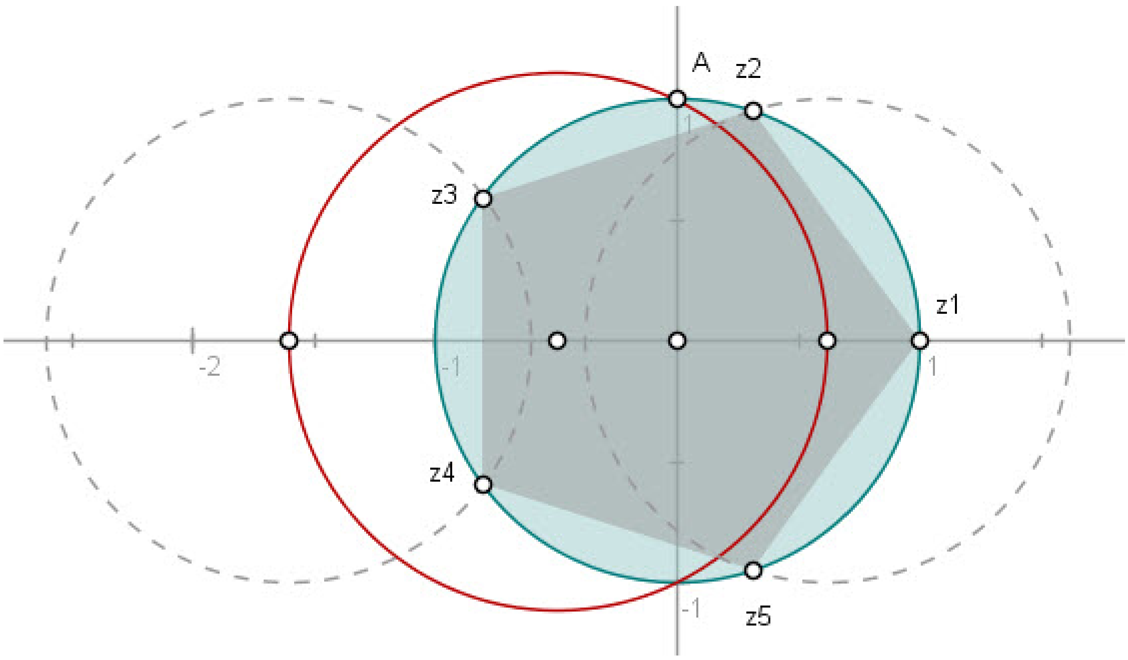
7. Wenn die y-Koordinate des Kreismittelpunktes grösser als der Kreisradius ist, schneidet der Kreis die x-Achse nicht und es gibt keine reellen Lösungen. Jeder Kreis mit Mittelpunkt auf der x-Achse, welcher den Carlyle-Kreis senkrecht schneidet, trifft die Senkrechte durch M in den komplexen Lösungen z_1 und z_2, wenn man die y-Achse als imaginäre Achse interpretiert! Dynamisch ist interessant zu sehen, wie die zwei reellen Lösungen zu einer Doppellösung werden und sich dann die komplexen Lösungen auf der Vertikalen durch M einnisten, wenn man B entsprechend bewegt.
   Rechne nach und experimentiere mit der DGS!



8. Suche mit DGS die Lösungen von $x^2 + 3x + 6 = 0$.

9. Lassen sich mit dem Carlyle-Kreis auch quadratische Gleichungen mit komplexen b und c lösen?

10. Für die Konstruktion des regelmässigen Fünfecks kann man die Lösungen der Gleichung $z^5 - 1 = 0$ auf dem Einheitskreis verwenden. Eine Lösung ist $z_1 = 1$. Dividiert man $z^5 - 1$ durch $z - 1$, erhält man $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.
Es gilt: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$ (*)
Wir setzen $u_1 = z_2 + z_5$ und $u_2 = z_3 + z_4$. Dann wird $u_1 + u_2 = -1$ wegen (*).
Nun ist aber $u_1 = 2\cos 72°$ und $u_2 = 2\cos 144°$. Damit erhält man für $u_1 \cdot u_2 = -1$.
Die u_1 und u_2 sind demnach Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$.
Diese konstruieren wir mit dem Carlyle-Kreis (rot). Durch das Zeichnen der Einheitskreise um u_1 und u_2 ergeben sich die Lösungen $z_2, \ldots, z_5$, da $z_2 + z_5 = u_1$ (in der Figur ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkellänge 1) und analog für u_2.



Konstruiere mit einer DGS. Vergleiche die Effizienz dieser Konstruktion mit andern Verfahren zur Erzeugung eines Fünfecks (Euklid, Ptolemäus).

11. Studiere das Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen von Descartes und vergleiche es mit dem 200 Jahre späteren von Carlyle.

Über die ebenen Probleme.

Wenn diese mit Hilfe der gewöhnlichen Geometrie, das heißt durch alleinige Benutzung gerader Linien und Kreise, die in einer und derselben Ebene gezogen werden, gelöst werden kann, so verbleibt nach Reduktion der letzten Gleichung höchstens ein unbekanntes Quadrat gleich gesetzt dem, was sich aus der Addition oder Subtraktion seiner mit einer bekannten Größe multiplizierten Wurzel und einer anderen ebenfalls bekannten Größe ergibt.

Wie diese gelöst werden.

Und in diesem Falle ist jene Wurzel oder die unbekannte Linie leicht aufzufinden. Denn habe ich z. B.

$$z^2 = az + b^2,$$

so konstruiere ich das rechtwinklige Dreieck NLM (Fig. 3), dessen Seite LM gleich der Quadratwurzel b aus der bekannten Größe b^2, und dessen andere Seite LN gleich $\frac{1}{2}a$, der Hälfte der anderen mit der unbekannten Linie z multiplizierten bekannten Größe ist.

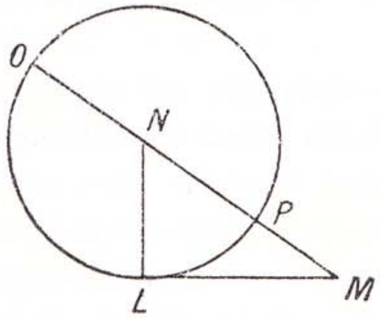


Fig. 3.

Verlängert man nun die Grundlinie MN dieses Dreiecks bis nach O hin, so daß NO gleich sei mit NL, so ist das ganze OM die gesuchte Linie z. Sie stellt sich wie folgt dar:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Habe ich

$$y^2 = -ay + b^2,$$

wo y die gesuchte Größe bedeutet, so zeichne ich dasselbe rechtwinkelige Dreieck NLM, und ziehe von seiner Grundlinie MN das Stück NP gleich NL ab; dann ist der Rest PM die gesuchte Wurzel y, so daß

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Hätte ich

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

so wäre in ähnlicher Weise PM gleich x^2 und ich erhielte

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}},$$

usw.

Habe ich endlich

$$z^2 = az - b^2,$$

so mache ich wie vorhin NL (Fig. 4) gleich $\frac{1}{2}a$ und LM gleich b; dann ziehe ich, statt die Punkte MN zu verbinden, MQR parallel mit LN und beschreibe um N als Mittelpunkt einen durch L gehenden Kreis, der MQR in den Punkten Q und R schneidet; die gesuchte Linie z ist MQ oder MR, denn in diesem Falle entsprechen ihr zwei verschiedene Ausdrücke, nämlich:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

und

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

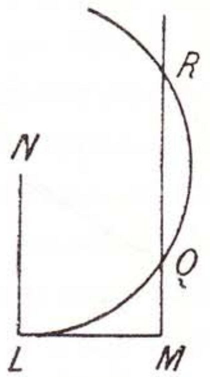


Fig. 4.

Und wenn der Kreis mit dem Mittelpunkte N, der durch den Punkt L hindurchgeht, die gerade Linie MQR weder schneidet noch berührt, so hat die Gleichung keine Wurzel, so daß man versichern kann, die Konstruktion des Problems sei unmöglich.

Im übrigen können diese selben Wurzeln auch auf unzähligen anderen Wegen gefunden werden, und ich wollte nur diese hierher setzen, weil sie sehr einfach sind und erkennen lassen, daß alle Probleme der gewöhnlichen Geometrie durch alleinige Anwendung des Wenigen konstruiert werden können, was in den vier erläuterten Figuren enthalten ist.