

Fundamentale Ideen der Mathematik

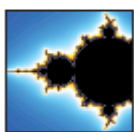
Albert A. Gächter

Vielen Schülerinnen und Schülern erscheint die Mathematik als ein Einheitsbrei von Formeln, Regeln und Sätzen, mehrheitlich unstrukturiert und grau. Sie bekunden Mühe zu erklären, was das Ganze zusammenhält und wo wichtige Ideen zur Sprache kommen. Seit ungefähr 35 Jahren denkt man in der Mathematikdidaktik über fundamentale Ideen intensiver nach. Ausgelöst durch J. Bruners *Der Prozess der Erziehung* im Jahre 1973 richtete man das Augenmerk auf grundlegende mathematische Konzepte, welche den Unterricht auf jeder Altersstufe prägen sollten. Der Weg war steinig und drohte sich im curricularen Dickicht zu verlieren. Dank der Arbeiten von Wittmann, Schwill, Schweiger, Vollrath und andern gelang es in den letzten Jahren, mit neuen Impulsen die Diskussion voran zu treiben.

Gemäss Umschreibung sind fundamentale Ideen ein Ansatz zur Strukturierung und schaffen Ordnung und Übersicht im Stoffangebot der Mathematik. Sie helfen den Unterricht inhaltlich zu gliedern und bilden ein „geistiges Band“ (H. Winter). Dadurch wird ein besseres und tieferes Verständnis von Mathematik erreicht. Fundamentale Ideen sind eine Antwort auf die Stofffülle. Stoffdruck ist stets hausgemacht. Das Durchdenken der Inhalte bildet eine gute Möglichkeit, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen.

Sollte Ihnen die folgende Liste fundamentaler Ideen nicht vollumfänglich zusagen, haben Sie vermutlich bereits den ersten Schritt zum Überdenken des eigenen Unterrichtes gewagt. Nochmals: Einen weltweiten Konsens über die Anzahl oder die Art der Ideen gibt es nicht.

Mein Katalog fundamentaler Ideen (Mathematik):



ALGORITHMUS

Rechenverfahren gehören zu den Grundfertigkeiten. In allen Lehrplänen sind sie gegenwärtig. Durch den Einsatz des Taschenrechners oder Computers erhalten die Algorithmen einen neuen Stellenwert (Fragen bezüglich Korrektheit, Schnelligkeit und Reichweite).

Im Zentrum stehen der sichere Umgang mit Zahlen, das Buchstabenrechnen und das Lösen von Gleichungen. In diesem Zusammenhang tauchen berühmte Namen auf, z.B. Heron, Euklid, al-Khwarizmi, Sierpinski.



METRIK

Die fundamentale Idee METRIK zeigt viele Facetten. Messen heisst vergleichen. Die Geschichte der Mathematik zeigt, wie das Messen auf immer kompliziertere Objekte ausgedehnt wurde. Messen hat sehr oft mit den Begriffen Abstand und Distanz zu tun.

Verschiedene Messverfahren sind im Mathematikunterricht anzutreffen (Daumensprung, Scheibchenmethode, Intervallschachtelung usw.).

Schätzen und Approximieren wollen gelernt und geübt sein. Viel Raum in vielen Lehrmitteln nehmen die geometrischen Örter ein. Als Kontrast zum üblichen Distanzbegriff bietet sich die Taximetrik an.



MITTE

Mitte ist ein schillernder Begriff. Es muss stets klar definiert werden, was man unter der Mitte von Objekten (Figuren, Zahlenmengen usw.) versteht. Die Statistik kennt verschiedene Mittelwerte. In der Geometrie sind die Begriffe mittlere Proportionale, Mittelpunkt, Mittelsenkrechte und Schwerpunkt wichtig.



OPTIMIERUNG

Optimieren gehört zu den beliebten Tätigkeiten des Menschen. Möglichst viel Gewinn, möglichst wenig Aufwand, möglichst zahlreiche Vorteile und nach Möglichkeit einen minimalen Zeitaufwand. Die Mathematik stellt eine reiche Palette an Verfahren zur Verfügung, um Optimierungen vorzunehmen. Oft erweisen sich einfach formulierbare Minimax-Probleme bei der Lösung als sehr störrisch. Berühmte Stichworte für Optimierungs-Probleme sind Isoperimetrie, kürzeste Wege, lineare Optimierung und Kugel-Packungen.



STEIGUNG

Der Steigungsbegriff bildet den Schlüssel für die so genannte Analysis, ein zentrales Gebiet der Mathematik. Ausgehend von der Geraden, wird die Steigung für beliebige Kurven definiert. Nebst vielen Anwendungen im Alltag (Kartographie, Steigungen von Bahnen, usw.) gehören lineare Gleichungen, Proportionalität, Gradient oder Wachstum dazu. Starke Begleiterin der Steigung ist die Krümmung, welche am Gymnasium leider ein Schattendasein fristet.



SYMMETRIE

Mit Symmetrie verbinden wir im Alltag immer auch Schönheit, Wohlproportioniertheit und Ebenmass. „Denkt Gott symmetrisch?“ heisst ein Buch von Ian Stewart, wo Symmetrie als Erklärung für die Regelmässigkeit der Natur heran gezogen wird. In der Geometrie beschreibt Symmetrie eine wichtige Eigenschaft von Figuren. Die verschiedenen Arten von Symmetrie sind mit den entsprechenden Abbildungen gekoppelt, welche solche symmetrische Figuren unverändert lassen. Als Einteilungsprinzip gestattet Symmetrie Ordnung zu schaffen.



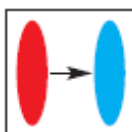
VARIABLE

Die Idee der Variablen gehört zu den genialsten mathematischen Erfindungen des Menschen. Einen „Platzhalter“, eine „Unbekannte“ für Elemente aus einer Grundmenge zu setzen, eröffnet den Zugang zum Buchstabenrechnen, zu Gleichungen und zu den Funktionen. Variable machen die mathematische Sprache einfacher und kompakter. Sie bilden eine Art von „Stenographie“.



ZAHL

Lesen, Schreiben und Rechnen gehören zu den grundlegenden Kulturtechniken. Seit der pythagoräischen These, dass die Zahl der Urgrund für alles Existierende ist („Alles ist Zahl“) hat sich bis heute die Bedeutung der Zahlen gehalten. Das digitale Zeitalter kommt dem Ideal der Pythagoräer wieder sehr nahe. Im Laufe der Jahrhunderte drang die Zahl in fast alle Bereiche des täglichen Lebens ein (Musik, Politik, Wirtschaft, Wissenschaft, Sport usw.). Wegmarken sind: Zahlbereichserweiterungen, Rechnen mit Resten, Eigenschaften von Zahlen (Teilbarkeit, Figurenzahlen), zählen und Bestimmung von Anzahlen (Kombinatorik).



ZUORDNUNG

Der Bezug von Elementen einer Menge zu Elementen einer andern Menge heisst Zuordnung, Relation, Funktion oder Abbildung je nach den Auflagen, welche für diesen Bezug gemacht werden. Funktionen nennt man in der Geometrie Abbildungen, um die Tätigkeit in den Vordergrund zu rücken. Es ist wichtig, sorgfältig in die verschiedenen Klassen von Funktionen und Abbildungen einzuführen. Neben den Darstellungsarten stehen die Eigenschaften im Vordergrund. In der Geometrie finden wir die Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen, am Gymnasium ergänzt durch affine Abbildungen. Die Algebra zeigt mit den Zahlenfolgen eine spezielle Art von Funktionen. Lineare, quadratische und exponentielle Zuordnungen können bereits auf der Sekundarstufe I gut gepflegt werden.



ZUFALL

Die Mathematik hat den Zufall berechenbar gemacht. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelingt es, zufälligen Ereignissen einen Wert zwischen 0 und 1 zuzuordnen und damit vergleichbar zu machen. Gute Modelle erlauben, Prognosen für die Zukunft zu erstellen und geben z.B.

Versicherungen die nötige Sicherheit. Für Simulationszwecke eignet sich die Monte Carlo Methode, welche in vielen Wissenschaften ein beliebtes Instrument geworden ist. Die wichtige Erkenntnis der Chaostheorie lautet, dass deterministische Ursachen zufällige Wirkungen haben können.



VEKTOR

Vektoren sind Objekte im Doppelpack: Neben der Grösse besitzen sie auch eine Richtung. Sie bilden die Sprache für grosse Teile der Physik und der Mathematik. In der geometrischen Algebra werden Vektoren für beliebige Dimensionen und mit neuen Operationen definiert.