



## Multiplikationstabellen

Rechenintensive Arbeiten in der Landesvermessung und Astronomie, sowie im Handel, machten es in früheren Jahrhunderten wünschenswert, höhere Rechenarten auf niedrigere zurück zu führen. Obwohl seit dem 17. Jahrhundert die Logarithmen als universelles Werkzeug zur Verfügung standen, erfreuten sich die Rechentafeln grosser Beliebtheit. Tabellen für das Einmaleins, das Multiplizieren und Dividieren grosser Zahlen und das Ausziehen von Wurzeln schossen wie Pilze aus dem Boden. Heutige Bibliotheken besitzen Tausende verschiedener Tabellenwerke für mannigfache damalige Bedürfnisse. Erstaunlich sind der Phantasie-reichtum und die Cleverness, mit welcher möglichst platzsparende Tabellen erstellt wurden. An dieser Stelle möchte ich drei berühmte Tabellen vorstellen und den zu Grunde liegenden Ideen etwas nachgehen.

### a) Die Produkte-Tafel von Crelle

Seit 1820 erschienen August Leopold Crelle's Rechentafeln in mehreren Auflagen.

**Dr. A. L. Crelle's**

# **R e c h e n t a f e l n**

welche

**alles Multipliciren und Dividiren**

**mit Zahlen unter Tausend**

ganz ersparen,

bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen.

Das Werk enthält das grosse Einmaleins bis 1000 mal 1000, also  $10^6$  Tafel-einträge. Wegen der Kommutativität der Multiplikation hätte Crelle den Platzbedarf auf die Hälfte reduzieren können. Er schreibt:

Man sieht, dass auf diese Weise die Tafeln alle Producte ungleicher Zahlen unter 1000, doppelt enthalten. Der Umfang der Tafeln hätte also eigentlich, beinahe auf die Hälfte eingeschränkt werden können, allein diese Einschränkung hätte, wie sich unten bei den Beispielen der Anwendung näher zeigen wird, den Gebrauch der Tafeln unbequem gemacht; daher sind die Producte für jeden Factor vollständig abgedruckt worden.

Die Berechnung von  $11 \cdot 382$  erfolgt so:

- Schlage jene Seite auf, wo der erste Factor oben als grosse fette Zahl erscheint. Hier also 11.
- Wähle die Kolonne mit den Hundertern des zweiten Faktors. Hier 300.
- Suche die Zeile mit der Nummer der Zehner und Einer des zweiten Faktors. Hier 82.
- Notiere die Zahl im Schnittpunkt dieser Kolonne und Zeile. Hier 42.
- Ganz rechts auf der Zeile befindet sich die anzuhängende Ziffernfolge. Hier 02.  
Das Ergebnis ist somit 4202.

Die Nullen z.B. bei  $11 \cdot 38200$  sind selber zu setzen. Die Tafel lässt sich auch für grössere Factoren als 1000 einsetzen. In der Einleitung steht:

Wenn nämlich beim Multipliciren die Factoren, beim Dividiren, Divisor und Quotient kleiner als 1000 sind, so erspart dieses Einmaleins die Rechnung ganz; denn es enthält die Producte solcher Zahlen fertig berechnet. Grössere Rechnungen vereinfacht es, in dem Verhältniss, wie man mehrere Ziffern zusammen nehmen kann. Wäre z. B. eine sechsziffrige Zahl mit einer andern sechsziffrigen Zahl zu multipliciren, so sind, wenn man sich nur des gewöhnlichen Einmaleins bedient, die Producte jeder Ziffer des Multiplicators, in jede Ziffer des Multiplicandus, also zusammen 36 einzelne Producte zum Resultat nöthig. Hier, wo man 3 Ziffern auf einmal zusammen nehmen, also eine sechsziffrige Zahl als nur aus 2 Theilen bestehend, oder gleichsam wie eine zweiziffrige Zahl behandeln kann, braucht man nur 4 Producte; mithin wird in diesem Fall die Zahl der einzelnen Producte bis auf den neunten Theil vermindert.

Für Factoren über 1000 werden also einige Multiplikationen durch Additionen ersetzt. Einen gewaltigen Schritt vorwärts bezüglich Einfachheit macht die Viertelquadrat-Methode.

11

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99
2	0	14	28	42	56	70	84	98	112	126
3	0	17	34	51	68	85	102	119	136	153
4	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
5	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225
6	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
7	0	35	70	105	140	175	210	245	280	315
8	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360
9	0	45	90	135	180	225	270	315	360	405
10	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
11	0	55	110	165	220	275	330	385	440	495
12	0	60	120	180	240	300	360	420	480	540
13	0	65	130	195	260	330	390	450	510	570
14	0	70	140	210	280	360	420	480	540	600
15	0	75	150	225	300	390	450	510	570	630
16	0	80	160	240	320	420	480	540	600	660
17	0	85	170	255	340	450	510	570	630	690
18	0	90	180	270	360	480	540	600	660	720
19	0	95	190	285	380	510	570	630	690	750
20	0	100	200	300	400	540	600	660	720	780
21	0	105	210	315	420	570	630	690	750	810
22	0	110	220	330	440	600	660	720	780	840
23	0	115	230	345	460	630	690	750	810	870
24	0	120	240	360	480	660	720	780	840	900
25	0	125	250	375	500	690	750	810	870	930
26	0	130	260	390	520	720	780	840	900	960
27	0	135	270	405	540	750	810	870	930	990
28	0	140	280	420	560	780	840	900	960	1020
29	0	145	290	435	580	810	870	930	990	1050
30	0	150	300	450	600	840	900	960	1020	1080
31	0	155	310	465	620	870	930	990	1050	1110
32	0	160	320	480	640	900	960	1020	1080	1140
33	0	165	330	495	660	930	990	1050	1110	1170
34	0	170	340	510	680	960	1020	1080	1140	1200
35	0	175	350	525	700	990	1050	1110	1170	1230
36	0	180	360	540	720	1020	1080	1140	1200	1260
37	0	185	370	555	740	1050	1110	1170	1230	1290
38	0	190	380	570	760	1080	1140	1200	1260	1320
39	0	195	390	585	780	1110	1170	1230	1290	1350
40	0	200	400	600	800	1140	1200	1260	1320	1380
41	0	205	410	615	820	1170	1230	1290	1350	1410
42	0	210	420	630	840	1200	1260	1320	1380	1440
43	0	215	430	645	860	1230	1290	1350	1410	1470
44	0	220	440	660	880	1260	1320	1380	1440	1500
45	0	225	450	675	900	1290	1350	1410	1470	1530
46	0	230	460	690	920	1320	1380	1440	1500	1560
47	0	235	470	705	940	1350	1410	1470	1530	1590
48	0	240	480	720	960	1380	1440	1500	1560	1620
49	0	245	490	735	980	1410	1470	1530	1590	1650
50	0	250	500	750	1000	1440	1500	1560	1620	1680
51	0	255	510	765	1020	1470	1530	1590	1650	1710
52	0	260	520	780	1040	1500	1560	1620	1680	1740
53	0	265	530	795	1060	1530	1590	1650	1710	1770
54	0	270	540	810	1080	1560	1620	1680	1740	1800
55	0	275	550	825	1100	1590	1650	1710	1770	1830
56	0	280	560	840	1120	1620	1680	1740	1800	1860
57	0	285	570	855	1140	1650	1710	1770	1830	1890
58	0	290	580	870	1160	1680	1740	1800	1860	1920
59	0	295	590	885	1180	1710	1770	1830	1890	1950
60	0	300	600	900	1200	1740	1800	1860	1920	1980
61	0	305	610	915	1220	1770	1830	1890	1950	2010
62	0	310	620	930	1240	1800	1860	1920	1980	2040
63	0	315	630	945	1260	1830	1890	1950	2010	2070
64	0	320	640	960	1280	1860	1920	1980	2040	2100
65	0	325	650	975	1300	1890	1950	2010	2070	2130
66	0	330	660	990	1320	1920	1980	2040	2100	2160
67	0	335	670	1005	1340	1950	2010	2070	2130	2190
68	0	340	680	1020	1360	1980	2040	2100	2160	2220
69	0	345	690	1035	1380	2010	2070	2130	2190	2250
70	0	350	700	1050	1400	2040	2100	2160	2220	2280
71	0	355	710	1065	1420	2070	2130	2190	2250	2310
72	0	360	720	1080	1440	2100	2160	2220	2280	2340
73	0	365	730	1095	1460	2130	2190	2250	2310	2370
74	0	370	740	1110	1480	2160	2220	2280	2340	2400
75	0	375	750	1125	1500	2190	2250	2310	2370	2430
76	0	380	760	1140	1520	2220	2280	2340	2400	2460
77	0	385	770	1155	1540	2250	2310	2370	2430	2490
78	0	390	780	1170	1560	2280	2340	2400	2460	2520
79	0	395	790	1185	1580	2310	2370	2430	2490	2550
80	0	400	800	1200	1600	2340	2400	2460	2520	2580
81	0	405	810	1215	1620	2370	2430	2490	2550	2610
82	0	410	820	1230	1640	2400	2460	2520	2580	2640
83	0	415	830	1245	1660	2430	2490	2550	2610	2670
84	0	420	840	1260	1680	2460	2520	2580	2640	2700
85	0	425	850	1275	1700	2490	2550	2610	2670	2730
86	0	430	860	1290	1720	2520	2580	2640	2700	2760
87	0	435	870	1305	1740	2550	2610	2670	2730	2790
88	0	440	880	1320	1760	2580	2640	2700	2760	2820
89	0	445	890	1335	1780	2610	2670	2730	2790	2850
90	0	450	900	1350	1800	2640	2700	2760	2820	2880
91	0	455	910	1365	1820	2670	2730	2790	2850	2910
92	0	460	920	1380	1840	2700	2760	2820	2880	2940
93	0	465	930	1395	1860	2730	2790	2850	2910	2970
94	0	470	940	1410	1880	2760	2820	2880	2940	3000
95	0	475	950	1425	1900	2790	2850	2910	2970	3030
96	0	480	960	1440	1920	2820	2880	2940	3000	3060
97	0	485	970	1455	1940	2850	2910	2970	3030	3090
98	0	490	980	1470	1960	2880	2940	2990	3060	3120
99	0	495	990	1485	1980	2910	2970	3030	3090	3150

12

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
1	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
2	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108
3	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135
4	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
5	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225
6	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
7	0	35	70	105	140	175	210	245	280	315
8	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360
9	0	45	90	135	180	225	270	315	360	405
10	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
11	0	55	110	165	220	275	330	385	440	495
12	0	60	120	180	240	300	360	420	480	540
13	0	65	130	195	260	330	390	450	510	570
14	0	70	140	210	280	360	420	480	540	600
15	0	75	150	225	300	390	450	510	570	630
16	0	80	160	240	320	420	480	540	600	660
17	0	85	170	255	340	450	510	570	630	690
18	0	90	180	270	360	480	540	600	660	720
19	0	95	190	285	380	510	570	630	690	750
20	0	100	200	300	400	540	600	660	720	780
21	0	105	210	315	420	570	630	690	750	810
22	0	110	220	330	440	600	660	720	780	840
23	0	115	230	345	460	630	690	750	810	870
24	0	120	240	360	480	660	720	780	840	900
25	0	125	250	375	500	690	750	810	870	930
26	0	130	260	390	520	720	780	840	900	960
27	0	135	270	405	540	750	810	870	930	990
28	0	140	280	420	560	780	840	900	960	1020
29	0	145	290	435	580	810	870	930	990	1050
30	0	150	300	450	600	840	900	960	1020	1080
31</										

## b) Die Viertelquadrat-Tafel von Blater

Euklid beweist in seinen *Elementen* die bemerkenswerte und sehr alte Formel (bereits 2000 v. Chr.?)

$$xy = \frac{1}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2$$

Eine erste Blüte erlebte diese Formel in der prostaphäretischen Methode des 16. Jahrhunderts und eine zweite in den Viertelquadrat-Tafeln des 19. Jahrhunderts. Der Ingenieur A. Voisin brachte 1817 die erste solche Tafel heraus. 1887 erschien nach eineinhalb Jahren intensiven Rechnens (!) in Wien die Tafel der Viertel-Quadrate von Joseph Blater für alle ganzen Zahlen von 1 bis 200000.

Blater, *dem Berufe nach der mathematischen Wissenschaft fern stehend und seiner höheren Vertrautheit mit dieser Disziplin entbehrend*, druckte die Tabellen auf eigene Kosten, *ein Entschluss, der durch den Mangel an Aussicht auf pekuniären Gewinn und Entlohnung der aufgewendeten Mühe nicht wankend gemacht wurde*. Die Rechenblätter sind sparsam und ausgeklügelt aufgebaut. Für Faktoren unter 1000 zum Beispiel wären lediglich 2000 Einträge nötig, anstelle der  $10^6$  bei Crelle.

Blater war überzeugt, dass seine Tafeln vollkommen fehlerfrei sind, denn er rechnete sie mehrfach und auf verschiedene Arten durch. Dies ist bemerkenswert, da es sich hier um Produkte mit sechsstelligen Faktoren handelt.

Die anfänglich nicht ganz einfache Handhabung der Tabellen sei an folgendem Beispiel erläutert:  $ab = 93319 \cdot 33674$ .

Vorgehen:

- Zunächst bildet man  $s = a + b$  und  $d = a - b$ . Hier 126993 und 59645.
- $s$  und  $d$  heißen Argumente und werden im Eingangsbereich  $N + n$  aufgesucht.  $N$  bedeutet den Dreierblock der Tausender,  $n$  jenen der Hunderter. Hier für  $s$  heisst dies  $N = 126$  und  $n = 993$ . Gesucht wird also die Tafel mit der Überschrift 990.
- $A$  bedeutet die Anfangsziffern,  $B$  die mittleren Ziffern und  $C$  die Endziffern. Hier für  $s$  ergibt dies  $A = 4031$ ,  $B = 805$  und  $C = 512$  ( $4031805512 = 0.25 \cdot s^2$ ).
- Analog für  $d$ . Hier sucht man die Tafel 640 und findet  $A = 889$ ,  $B = 381$  und  $C = 506$  ( $889381506 = 0.25 \cdot d^2$ ).
- Die Subtraktion liefert  $ab$ . Hier  $ab = 3142424006$ .

Neben den Multiplikationen sind auch *Quadrierungen und das Wurzelziehen bedeutend erleichtert und durch vorzügliche Correctheit fehlerlose Resultate verbürgt*.

L

IL

N + n	990 991 992 993 994 995 996 997 998 999				N + n	990 991 992 993 994 995 996 997 998 999															
	A		B			A		B													
100	2549	745	705	846	896	947	997*048	*098*140*199	101	2600	490	541	592	643	694	745	796	847	898	949	
102	2651	735	786	838	889	941	992*044	*095*147*198	103	2703	480	532	584	636	688	740	792	844	896	948	
104	2755	725	777	830	882	935	987*040	*092*145*197	105	2808	470	523	576	629	682	735	788	841	894	947	
106	2861	715	768	822	875	929	982*036	*089*143*196	107	2915	460	514	568	622	676	730	784	838	892	946	
108	2969	705	759	814	868	923	977*032	*086*141*195	109	3024	450	505	560	615	670	725	780	835	890	945	
110	3079	695	750	806	861	917	972*028	*083*139*194	111	3135	440	496	552	608	664	720	776	832	888	944	
112	3191	685	741	798	854	911	967*024	*080*137*193	113	3248	430	487	544	601	658	715	772	829	886	943	
114	3305	675	732	790	847	905	962*020	*077*135*192	115	3363	420	478	536	594	652	710	768	826	884	942	
116	3421	665	723	782	840	899	957*016	*074*133*191	117	3480	410	469	528	587	646	705	764	823	882	941	
118	3539	655	714	774	833	893	952*012	*071*131*190	119	3599	400	460	520	580	640	700	760	820	880	940	
120	3659	645	705	766	826	887	947*008	*068*129*189	121	3720	390	451	512	573	634	695	756	817	878	939	
122	3781	635	696	758	819	881	942*004	*065*127*188	123	3843	380	442	504	566	628	690	752	814	876	938	
124	3905	625	687	750	812	875	937*000	*062*125*187	125	3968	370	433	496	559	622	685	748	811	874	937	
126	4031	615	678	742	805	869	932*006	*059*123*186	127	4095	360	424	488	552	616	680	744	808	872	936	
128	4159	605	669	734	798	863	927*002	*056*121*185	129	4224	350	415	480	545	610	675	740	805	870	935	
130	4289	595	660	726	791	857	922*008	*053*119*184	131	4355	340	406	472	538	604	670	736	802	868	934	
132	4421	585	651	718	784	851	917*004	*050*117*183	133	4488	330	397	464	531	598	665	732	799	866	933	
134	4555	575	642	710	777	845	912*000	*047*115*182	135	4623	320	388	456	524	592	660	728	796	864	932	
136	4691	565	633	702	770	839	907*006	*044*113*181	137	4760	310	379	448	517	586	655	724	793	862	931	
138	4829	555	624	694	763	833	902*002	*041*111*180	139	4899	300	370	440	510	580	650	720	790	860	930	
140	4969	545	615	686	756	827	897*008	*038*109*179	141	5040	290	361	432	503	574	645	716	787	858	929	
142	5111	535	606	678	749	821	892*004	*035*107*178	143	5183	280	352	424	496	568	640	712	784	856	928	
144	5255	525	597	670	742	815	887*000	*032*105*177	145	5328	270	343	416	489	562	635	708	781	854	927	
146	5401	515	588	662	735	809	882*006	*029*103*176	147	5475	260	334	408	482	556	630	704	778	852	926	
148	5549	505	579	654	728	803	877*002	*026*101*175	149	5624	250	325	400	475	550	625	700	775	850	925	
150	5699	495	570	646	721	797	872*008	*023*099*174	151	5775	240	316	392	468	544	620	696	772	848	924	
152	5851	485	561	638	714	791	867*004	*020*097*173	153	5928	230	307	384	461	538	615	692	769	846	923	
154	6005	475	552	630	707	785	862*000	*017*095*172	155	6083	220	298	376	454	532	610	688	766	844	922	
156	6161	465	543	622	700	779	857*006	*014*093*171	157	6240	210	289	368	447	526	605	684	763	842	921	
158	6319	455	534	614	693	773	852*002	*011*091*170	159	6399	200	280	360	440	520	600	680	760	840	920	
160	6479	445	525	606	686	767	847*008	*008*089*169	161	6560	190	271	352	433	514	595	676	757	838	919	
162	6641	435	516	598	679	761	842*004	*005*087*168	163	6723	180	262	344	426	508	590	672	754	836	918	
164	6805	425	507	590	672	755	837*000	*002*085*167	165	6888	170	253	336	419	506	585	668	751	834	917	
166	6971	415	498	582	665	749	832*006	*000*083*166	167	7055	160	244	328	412	496	580	664	748	832	916	
168	7139	405	489	574	658	743	827*002	*000*081*165	169	7224	150	235	320	405	490	575	660	745	830	915	
170	7309	395	480	566	651	737	822*008	*000*079*164	171	7395	140	226	312	398	484	570	656	742	828	914	
172	7481	385	471	558	644	731	817*004	*000*077*163	173	7568	130	217	304	391	478	565	652	739	826	913	
174	7655	375	462	550	637	725	812*000	*000*075*162	175	7743	120	208	296	384	472	560	648	736	824	912	
176	7831	365	453	542	630	719	807*006	*000*073*161	177	7920	110	199	288	377	466	555	644	733	822	911	
178	8009	355	444	534	623	713	802*002	*000*071*160	179	8099	100	190	280	370	460	550	640	730	820	910	
180	8189	345	435	526	616	707	797*008	*000*069*159	181	8280	090	181	272	363	454	545	636	727	818	909	
182	8371	335	426	518	610	701	792*004	*000*067*158	183	8463	080	172	264	356	448	540	632	724	816	908	
184	8555	325	417	510	604	695	787*000	*000*065*157	185	8648	070	163	256	349	442	535	628	721	814	907	
186	8741	315	408	502	595	689	782*006	*000*063*156	187	8835	060	154	248	342	436	530	624	718	812	906	
188	8929	305	399	494	588	683	777*002	*000*061*155	189	9024	050	145	240	335	430	525	620	715	810	905	
190	9119	295	390	486	581	677	772*008	*000*059*154	191	9215	040	136	232	328	434	530	616	712	808	904	
192	9311	285	381	478	574	671	767*004	*000*057*153	193	9408	030	127	224	321	418	515	612	709	806	903	
194	9505	275	372	470	567	665	762*000	*000*055*152	195	9603	020	118	216	314	412	510	608	706	804	902	
196	9701	265	363	462	560	659	757*006	*000*053*151	197	9800	010	109	208	307	406	505	604	703	802	901	
198	9899	255	354	454	553	653	752*002	*000*051*150	199	9999	000	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
C	025	520	016	512	009	506	004	502	001	500	C	025	020	016	012	009	006	004	002	001	000

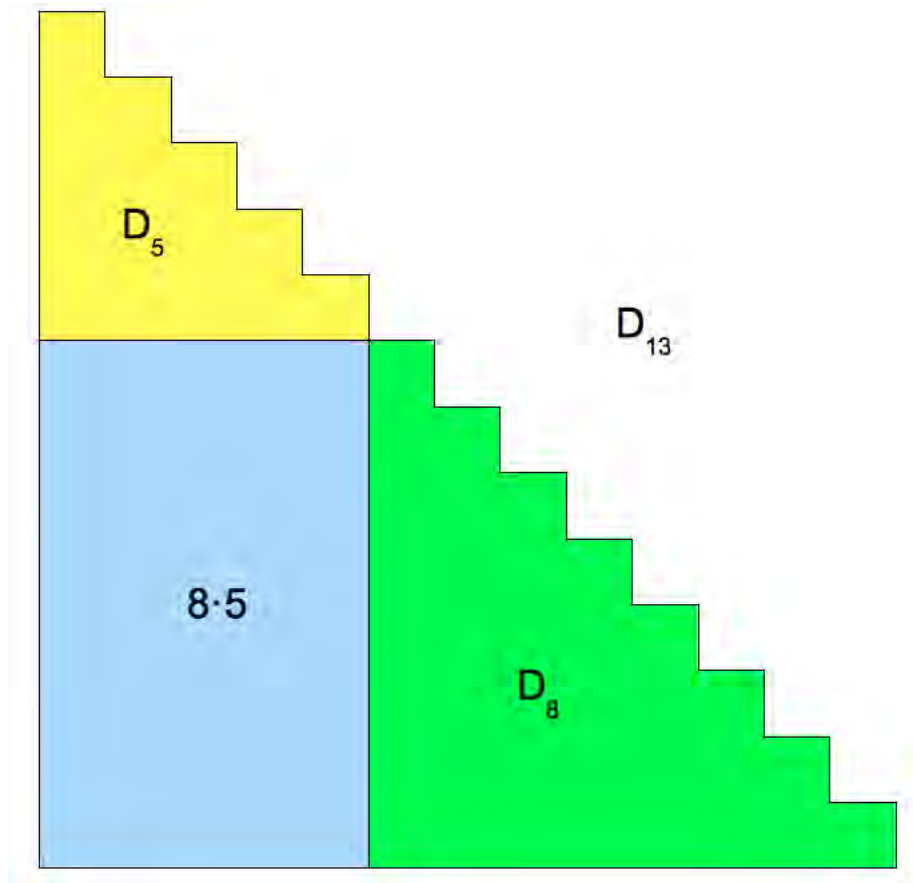
L

II

L					II																		
N + n	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	N + n	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649		
0	0	102	102	103	103	103	104	104	104	105	I	0	672	673	674	674	675	676	677	678	678	679	
2	1	742	743	745	746	747	749	750	751	752	754	3	3	312	314	316	317	319	321	323	325	326	328
4	5	382	384	387	389	391	394	396	398	400	403	5	7	052	055	058	060	063	066	069	072	074	077
6	11	022	025	029	032	035	039	042	045	048	052	7	14	592	596	600	603	607	611	615	619	622	626
8	18	662	666	671	675	679	684	688	692	696	701	9	23	232	237	242	246	251	256	261	266	270	275
10	28	302	307	313	318	323	329	334	339	344	350	11	33	872	878	884	889	895	901	907	913	918	924
12	39	042	048	055	061	067	074	080	086	092	099	13	46	512	519	526	532	539	546	553	560	566	573
14	53	582	589	597	604	611	619	626	633	640	648	15	61	152	160	168	175	183	191	199	207	214	222
16	69	222	230	239	247	255	264	272	280	288	297	17	77	792	801	810	818	827	836	845	854	862	871
18	86	862	871	881	890	899	909	918	927	936	946	19	96	432	442	452	461	471	481	491	501	510	520
20	106	502	512	523	533	543	554	564	574	584	595	21	117	072	083	094	104	115	126	137	148	158	169
22	128	142	153	165	176	187	199	210	221	232	244	23	139	712	724	736	747	759	771	783	795	806	818
24	151	782	794	807	819	831	844	856	868	880	893	25	164	352	365	378	390	403	416	429	442	454	467
26	177	422	435	449	462	475	489	502	515	528	542	27	190	992	1006	1020	1033	1047	1061	1075	1089	1102	1116
28	205	062	076	091	105	119	134	148	162	176	191	29	219	632	647	662	676	691	706	721	736	750	765
30	234	702	717	733	748	763	779	794	809	824	840	31	250	272	288	304	319	335	351	367	383	398	414
32	266	342	358	375	391	407	424	440	456	472	489	33	282	912	929	946	962	979	996	1013	1030	1046	1063
34	299	982	999	1017	1034	1051	1069	1086	1103	1120	1138	35	317	552	570	588	605	623	641	659	677	694	712
36	335	622	640	659	677	695	714	732	750	768	787	37	354	192	211	230	248	267	286	305	324	343	361
38	373	262	281	301	320	339	359	378	397	416	436	39	392	832	852	872	891	911	931	951	971	990	1010
40	412	902	922	943	963	983	1004	1024	1044	1064	1085	41	433	472	493	514	534	555	576	597	618	638	659
42	454	542	563	585	606	627	649	670	691	712	734	43	476	112	134	156	177	199	221	243	265	286	308
44	498	182	204	227	249	271	294	316	338	360	383	45	520	752	775	798	820	843	866	889	912	934	957
46	543	822	845	869	892	915	939	962	985	1008	1032	47	567	392	416	440	463	487	511	535	559	582	606
48	591	462	486	511	535	559	584	608	632	656	681	49	616	032	057	082	106	131	156	181	206	230	255
50	641	102	127	153	178	203	229	254	279	304	330	51	666	672	698	724	749	775	801	827	853	878	904
52	698	742	768	795	821	847	874	900	926	952	979	53	719	312	339	366	392	419	446	473	500	526	553
54	746	382	409	437	464	491	519	546	573	600	628	55	773	952	980	1008	1035	1063	1091	1119	1147	1174	1202
56	802	022	050	079	107	135	164	192	220	248	277	57	820	592	621	650	678	707	736	765	794	822	851
58	859	662	691	721	750	779	809	838	867	896	926	59	889	272	301	330	359	388	417	446	475	504	533
60	919	302	332	363	393	423	454	484	514	544	575	61	949	872	903	934	964	995	1026	1057	1088	1118	1149
62	980	942	973	1005	1036	1067	1099	1130	1161	1192	1224	63	1012	512	544	576	607	639	671	703	735	766	798
64	1044	352	614	647	679	711	744	776	808	840	873	65	1077	152	185	218	250	283	316	349	382	414	447
66	1110	222	253	289	322	355	389	422	455	488	522	67	1143	792	826	860	893	927	961	995	1029	1063	1096
68	1177	862	896	931	965	999	1034	1068	1102	1136	1171	69	1212	432	467	502	536	571	606	641	676	710	745
70	1247	502	537	573	608	643	679	714	749	784	820	71	1283	072	108	144	179	215	251	287	323	358	394
72	1319	142	178	215	251	287	324	360	396	432	469	73	1355	712	749	786	822	859	896	933	970	1006	1043
74	1392	782	819	857	894	931	969	1006	1043	1080	1118	75	1430	352	390	428	465	503	541	579	617	654	692
76	1468	422	460	499	537	575	614	652	690	728	767	77	1506	992	1031	1070	1108	1147	1185	1225	1264	1302	1341
78	1546	062	101	141	180	219	259	298	337	376	416	79	1585	632	672	712	751	791	831	871	911	950	990
80	1625	702	742	783	823	863	904	944	984	1024	1065	81	1666	272	313	354	394	435	476	517	558	598	639
82	1707	342	383	425	466	507	549	590	631	672	714	83	1748	912	954	996	1037	1079	1121	1163	1205	1246	1288
84	1790	982	1024	1067	1109	1151	1194	1236	1278	1320	1363	85	1833	552	595	638	680	723	766	809	852	894	937
86	1876	622	665	709	752	795	839	882	925	968	1012	87	1920	192	236	280	323	367	411	455	499	542	586
88	1964	262	306	351	395	439	484	528	572	616	661	89	2008	832	877	922	966	1011	1056	1101	1146	1190	1235
90	2053	902	947	993	1038	1083	1129	1174	1219	1264	1310	91	2099	472	518	564	609	655	701	747	793	838	884
92	2145	542	588	635	681	727	774	820	866	912	959	93	2192	112	159	206	252	299	346	393	440	486	533
94	2239	182	229	277	324	371	419	466	513	560	608	95	2286	752	800	848	895	943	991	1039	1087	1134	1182
96	2334	822	870	919	967	1015	1064	1112	1160	1208	1257	97	2383	392	441	490	538	587	635	685	734	782	831
98	2432	462	511	561	610	659	709	758	807	856	906	99	2482	032	082	132	181	231	281	331	381	430	480
C		400	720	041	362	684	006	329	652	976	300	C		400	220	041	862	684	506	329	152	976	800

### c) Die Dreieckszahlen-Tafel von Joncourt

Bei der Ersetzung von Multiplikationen durch Additionen spielen die Dreieckszahlen ihre Trumpfkarte aus. Das Produkt  $xy$  lässt sich auf mehrere Arten als Summe von Dreieckszahlen schreiben. Eine bequeme Methode ist  $xy = D_{x+y} - D_x - D_y$ , wobei z.B.  $D_x$  die  $x$ -te Dreieckszahl bedeutet. Beispiel:  $8 \cdot 5$ :



$$8 \cdot 5 = D_{13} - D_5 - D_8 = 91 - 15 - 36 = 40.$$

Bereits 1762 brachte Elie de Joncourt in den Niederlanden die wohl einzige Dreieckszahlen-Tafel heraus. Von A. Arnaudeau gibt es 1896 wenigstens eine Projektbeschreibung seines nie erschienenen Buches.

DE LA  
NATURE  
ET DES  
PRINCIPAUX USAGES  
DE LA  
PLUS SIMPLE ESPECE  
DE  
NOMBRES TRIGONAUX.

Avec deux Tables arithmetiques, dont la premiere donne d'abord,  
& sans la moindre peine, outre la solution de divers autres Pro-  
blemes, la Racine quarrée de tout Quarré, exprimé par un  
Nombre entier, & situé entre l'Unité & quarante mille Mil-  
lions. La seconde, qui n'est que de sept pages, aide à  
trouver, aussi facilement, la Racine cubique de tout  
Cube, exprimé par un Nombre entier, & situé entre  
l'Unité & deux cens seize mille Millions.

Ouvrage traduit du *Latin* de  
MR. DE JONCOURT,  
DOCTEUR ET PROFESSEUR EN PHILOSOPHIE,  
*Par l'Auteur même.*

*peragro loca, nullius ante  
Trita solo, juvat integros accedere Fontes.*  
LUCR. IV. 2.



CHEZ  
A LA HATE,  
M. H U S S O N.  
M. D. CC. LXII.

Wie aus der Titelseite ersichtlich, hält sich Joncourt nicht bei der Multiplikation auf, sondern behandelt ausführlich das Wurzelziehen. Als Beispiel für die Multiplikation wählen wir  $3961 \cdot 4041$ .

N.Nat.	N. Trig.	N.Nat.	N. Trig.	N.Nat.	N. Trig.
3961	7846741	3991	7966036	4021	8086231
62	7850703	92	7970028	22	8090253
63	7854666	93	7974021	23	8094276
64	7858630	94	7978015	24	8098300
65	7862595	95	7982010	25	8102325
66	7866561	96	7986006	26	8106351
67	7870528	97	7990003	27	8110378
68	7874496	98	7994001	28	8114406
69	7878465	99	7998000	29	8118435
70	7882435	4000	8002000	30	8122465
71	7886406	4001	8006001	31	8126496
72	7890378	2	8010003	32	8130528
73	7894351	3	8014006	33	8134561
74	7898325	4	8018010	34	8138595
75	7902300	5	8022015	35	8142630
76	7906276	6	8026021	36	8146666
77	7910253	7	8030028	37	8150703
78	7914231	8	8034036	38	8154741
79	7918210	9	8038045	39	8158780
80	7922190	10	8042055	40	8162820
81	7926171	11	8046066	41	8166861
82	7930153	12	8050078	42	8170903
83	7934136	13	8054091	43	8174946
84	7938120	14	8058105	44	8178990
85	7942105	15	8062120	45	8183035
86	7946091	16	8066136	46	8187081
87	7950078	17	8070153	47	8191128
88	7954066	18	8074171	48	8195176
89	7958055	19	8078190	49	8199225
90	7962045	20	8082210	50	8203275

M 4051 | 8207326

N.Nat.	N. Trig.	N.Nat.	N. Trig.	N.Nat.	N. Trig.
7921	31375081	7951	31613176	7981	31852171
22	31383003	52	31621128	82	31860153
23	31390926	53	31629081	83	31868136
24	31398850	54	31637035	84	31876120
25	31406775	55	31644990	85	31884105
26	31414701	56	31652946	86	31892091
27	31422628	57	31660903	87	31900078
28	31430556	58	31668861	88	31908066
29	31438485	59	31676820	89	31916055
30	31446415	60	31684780	90	31924045
31	31454346	61	31692741	91	31932036
32	31462278	62	31700703	92	31940028
33	31470211	63	31708666	93	31948021
34	31478145	64	31716630	94	31956015
35	31486080	65	31724595	95	31964010
36	31494016	66	31732561	96	31972006
37	31501953	67	31740528	97	31980003
38	31509891	68	31748496	98	31988001
39	31517830	69	31756465	99	31996000
40	31525770	70	31764435	8000	32004000
41	31533711	71	31772406	8001	32012001
42	31541653	72	31780378	2	32020003
43	31549596	73	31788351	3	32028006
44	31557540	74	31796325	4	32036010
45	31565485	75	31804300	5	32044015
46	31573431	76	31812276	6	32052021
47	31581378	77	31820253	7	32060028
48	31589326	78	31828231	8	32068036
49	31597275	79	31836210	9	32076045
50	31605225	80	31844190	10	32084055

Z 8011 | 32092066

$D_{8002} = 32020003$ ,  $D_{3961} = 7846741$  und  $D_{4041} = 8166861$ . Nach obiger Formel ergibt  $32020003 - 16013602 = 16006401$ .

Für die Berechnung von Produkten mit Faktoren bis 1000 benötigt man mit der Formel  $xy = D_x + D_{y-1} - D_{x-y}$  nur noch 1000 Einträge in der Tabelle, also am wenigsten von allen drei hier vorgestellten Rechentafeln.

## Aktivitäten

1. Rechne mit der Tabelle von Crelle 12 · 562.
2. Zeige, wie man mit der Methode von Crelle  $93319 \cdot 33674$  berechnen kann (die Multiplikationen sind in Ermangelung der Tafeln mit dem TR zu ermitteln).
3. Erstelle mit einer Tabellenkalkulation oder mit *mathematica* eine einfache Viertelquadrat-Tabelle. Die Variable  $x$  läuft von  $0.100, 0.101$ , usw. bis  $0.999$ . Welche Multiplikationen sind damit ausführbar? Schreibe eine Anleitung zur Benützung der Tabelle.
4. Beweise die Formel  $xy = D_x + D_{y-1} - D_{x-y}$ .
5. Ist die Formel richtig?  $xy = D_{x-1} + D_y - D_{x-y-1}$ . Veranschauliche!

6. Dreieckszahlen sind beliebte Objekte in der Mathematik. Wo kommen sie zum Einsatz?
7. Suche im Internet die drei hier besprochenen Rechentafeln. Was weiss man über die Autoren?