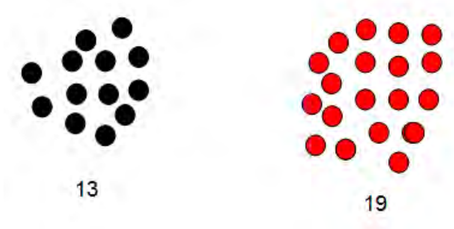
Napier's Rechenbrett

Die Bedeutung des Zweiersystems ist im Computer-Zeitalter kein Geheimnis mehr. Verdoppeln und Halbieren sind Tätigkeiten, welche uralt sind. Sie erfordern weder ein Zählen noch Rechnen, sondern lediglich ein Vergleichen. Um zum Beispiel die Anzahl Steine in einer Schale zu verdoppeln, legt man zu jedem Stein in der Schale einen weiteren dazu. Das Halbieren bekommt man durch das gleichmässige Aufteilen der Steine in zwei Schalen. Die *russische Bauern-Multiplikation* macht Gebrauch davon und war bereits im Altertum bekannt.



Um $19 \cdot 13$ zu rechnen, halbiert man fortlaufend das eine Häufchen (Reste lässt man weg) und verdoppelt analog das andere. Der Einfachheit halber zeigen wir dies mit Zahlen:

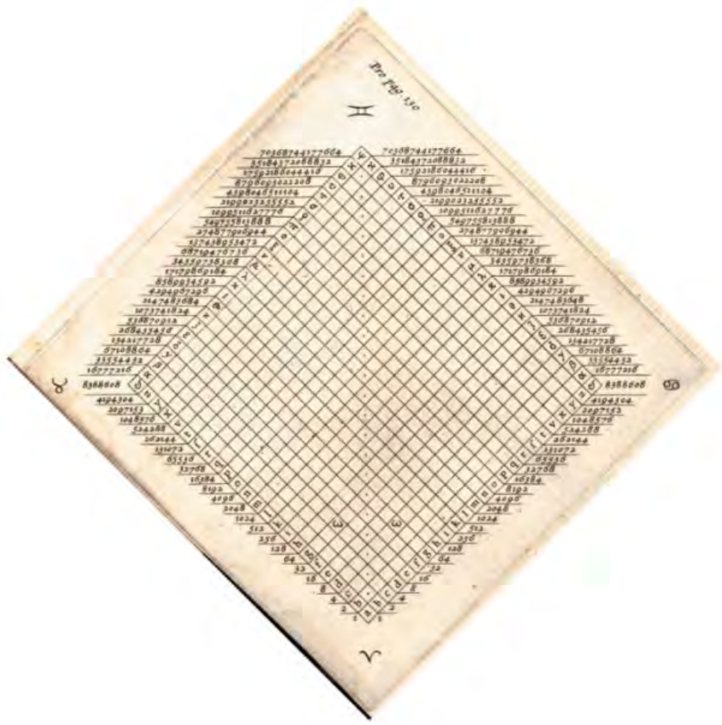
19	x 13
9	26
~~4~~	~~52~~
~~2~~	~~104~~
1	208
	247

Die Zeilen mit geraden Zahlen beim Halbieren werden gestrichen.

John Napier (1550–1617) kennt man als Mit-Erfinder der Logarithmen. Für die Bedürfnisse des einfachen Volkes entwickelte er aber auch seine Rechenstäbe, welche damals das Rechnen im Alltag wesentlich erleichterten. Weniger bekannt dürfte sein, dass Napier die erste mechanische Realisierung des Rechnens im Zweiersystem erfand. Bereits 1484 erklärte Nicolas Chuquet in seinem Manuskript *Triparty en la science des nombres* das Rechnen mit Zweierpotenzen. Im Jahre 1617 beschrieb Napier in seinem Büchlein *Rabdologiae...* (Stäbesammlung) ausführlich seine Rechenstäbe und anschliessend das Rechenbrett: *Arithmeticae localis, quae in Scacchia*

abaco exercetur.
Erst das Rechenbrett von Napier machte die Vorteile des Zweiersystems für das schnelle Multiplizieren und Dividieren grosser Zahlen und das Wurzelziehen deutlich. Lediglich das Verschieben von Marken nach bestimmten Regeln auf einem schachbrettartigen Feld musste gelernt werden.

a) Das Rechenbrett

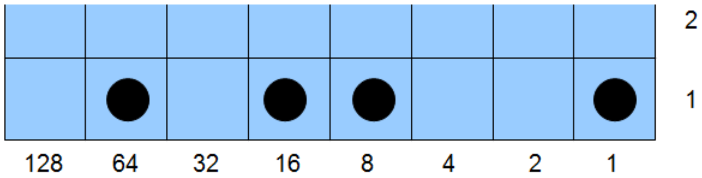


An den Rändern stehen die Potenzen von 2. Die gepunktete Diagonale enthält die Quadratzahlen. Wir verwenden für unsere Beispiele ein Brett mit nur 64 Feldern.

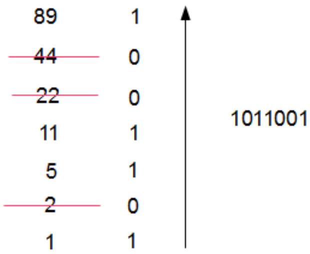
b) Die Regeln

Die Arbeit mit dem Rechenbrett basiert auf 3 Regeln: Umrechnen, Verschieben und Bereinigen.

Umrechnen
Für Napier ist klar, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von verschiedenen Zweierpotenzen schreiben lässt. Für die Umrechnung vom Zehner- ins Zweiersystem schlägt er das *Subtraktionsverfahren* oder die *Methode der Division durch* 2 vor.
Beispiel: 89 lautet im Zweiersystem $2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = 64 + 16 + 8 + 1$.



Subtraktionsverfahren:
Die höchste in 89 enthaltene Zweierpotenz ist 64. Setze dort eine Marke und subtrahiere 64 von 89. Mit dem Rest 25 verfahre ebenso usw.
Divisionsmethode:
Lege eine Marke auf die Position 1, da 89 ungerade ist. Falls das Resultat der Division durch 2 eine gerade Zahl ergibt, lege keine Marke in das nächste links stehende Feld. Bei einer ungeraden Zahl setze eine Marke, subtrahiere 1 und dividiere erneut usw. Dies entspricht genau der Halbierungsspalte bei der Bauermultiplikation:

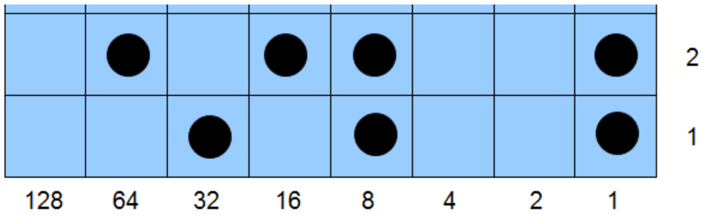


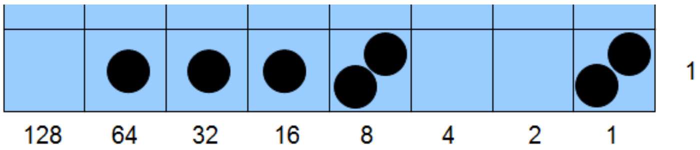
Verschieben
Verschiebt man eine Marke senkrecht zu den Seiten des Brettes (wie der Turm zieht), so verdoppelt oder halbiert sich ihr Wert.
Bewegt man eine Marke diagonal (wie der Läufer zieht) von links nach rechts, so bleibt ihr Wert erhalten.

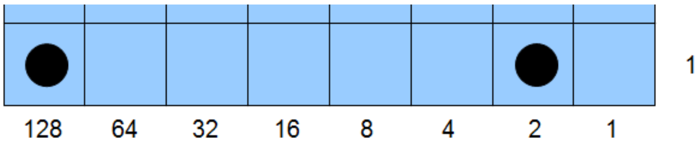
Bereinigen
Liegen zwei Marken in denselben Feld, so dürfen sie durch eine einzige Marke in der nächst höheren Position (Feld nach oben oder nach links) ersetzt werden. Umgekehrt kann man eine Marke auch durch zwei Marken in der nächst tieferen Position austauschen.

c) Addition

Vorgehen: $89 + 41 = 130$
- Plaziere die Summanden in den Zeilen des Rechenbrettes.
- Verschiebe alle Marken senkrecht (so wie die Türme ziehen) nach unten in die erste Zeile (ohne Wertänderung!).
- Bereinige!



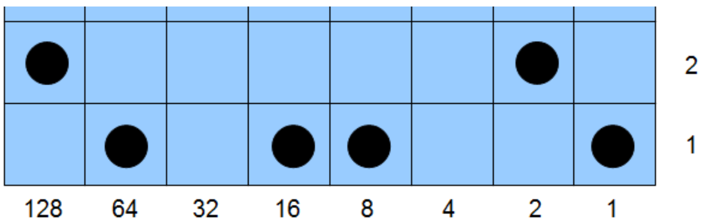


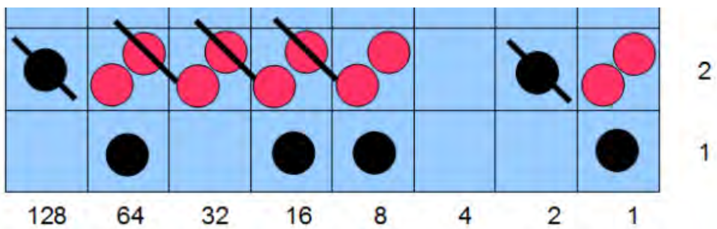


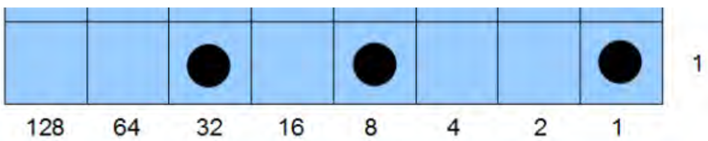
d) Subtraktion

Vorgehen: $130 - 89 = 41$

- Plaziere den Minuenden in der 2. und den Subtrahenden in der 1. Zeile des Rechenbrettes.
- Bereinige den Minuenden so, dass über jeder Marke des Subtrahenden mindestens eine Marke liegt.
- Subtrahiere die Anzahlen!



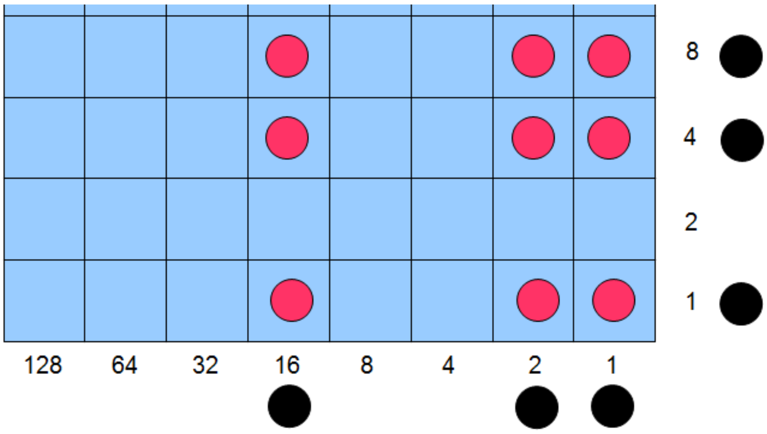


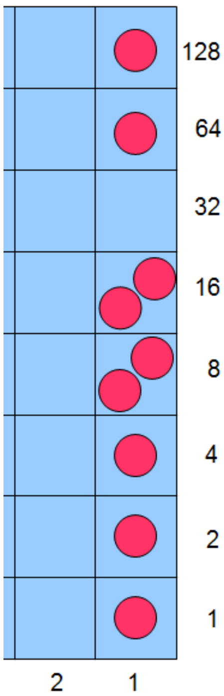


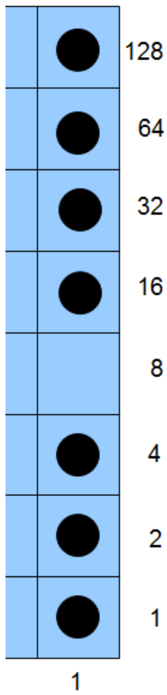
e) Multiplikation

Vorgehen: $19 \cdot 13 = 247$

- Plaziere die Faktoren am Rand ausserhalb des Rechenbrettes.
- Setze im Schnittpunkt jeder besetzten Zeile und Spalte eine Marke.
- Verschiebe alle Marken diagonal (so wie die Läufer ziehen) nach rechts in die erste Spalte.
- Bereinige!



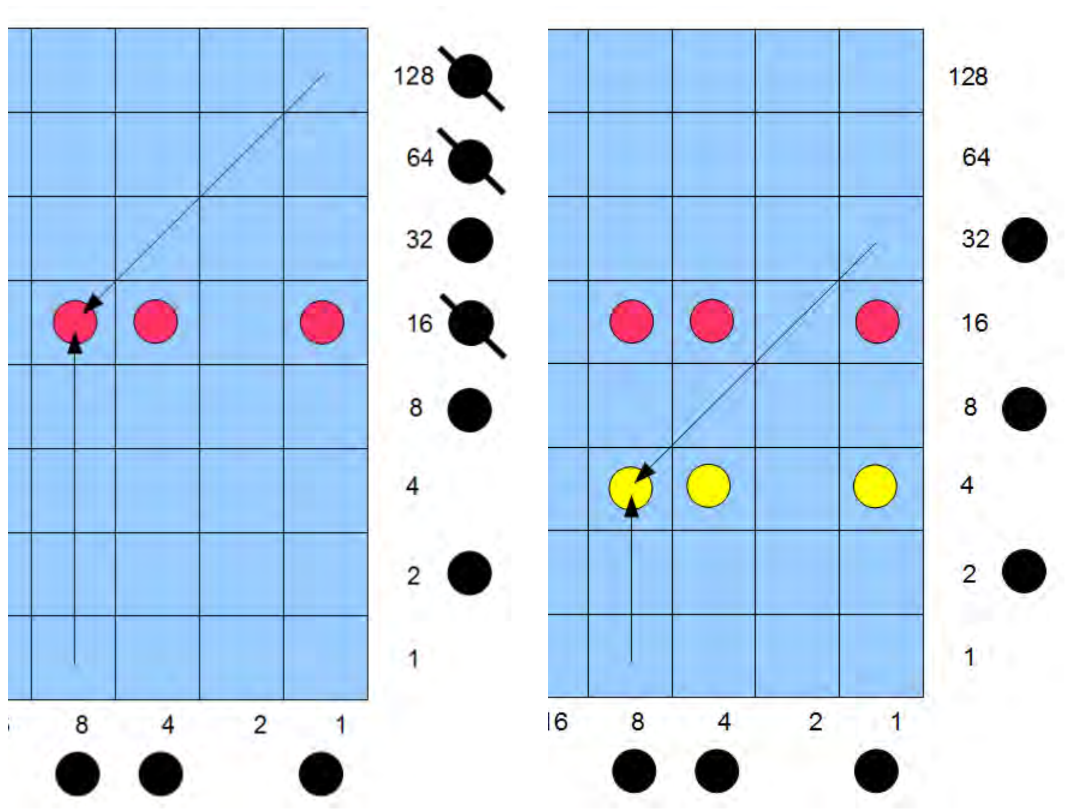




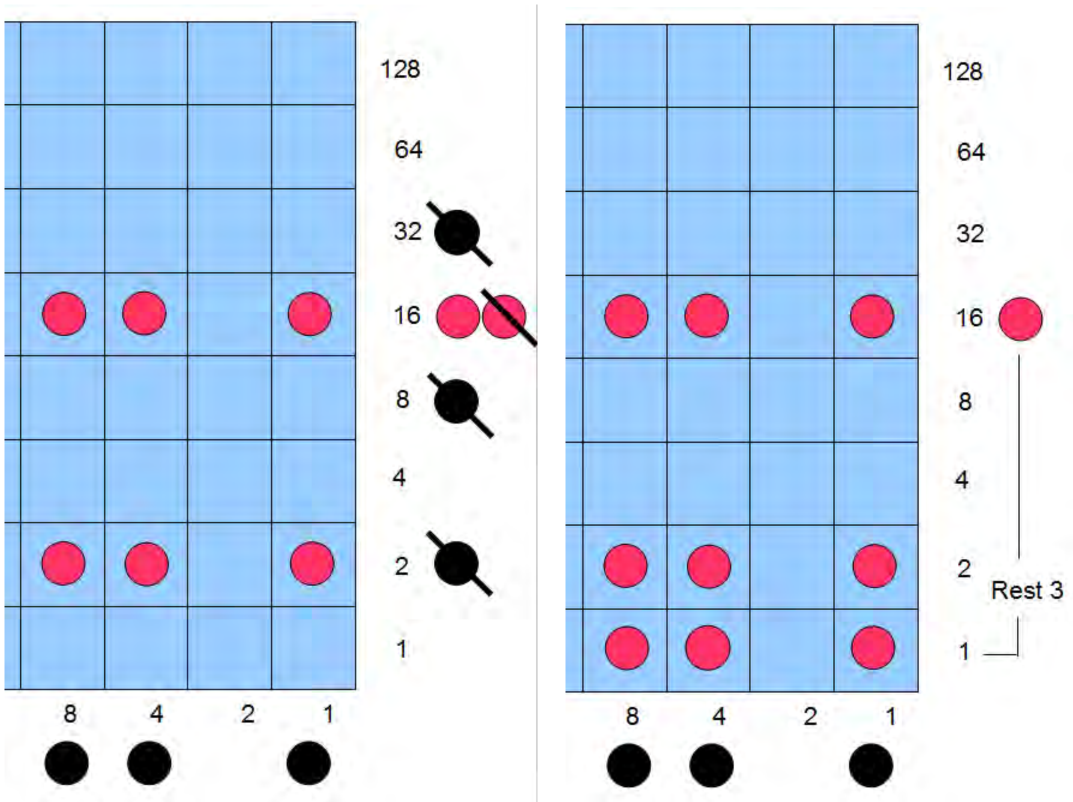
f) Division

Vorgehen: $250 : 13 = 19$ Rest 3

- Plaziere den Dividenden und den Divisor am Rand ausserhalb des Rechenbrettes.
- Gehe von der höchsten Marke des Dividenden diagonal nach unten und von der höchsten Marke des Divisors senkrecht nach oben und setze im Schnittpunkt eine Marke.
- Setze in derselben Zeile über jeder Marke des Divisors eine weitere Marke. Es entsteht horizontal ein *Segment*, wie Napier dies nennt.
- Subtrahiere den Wert dieses Segmentes vom Dividenden. Mit dem Rest wiederhole den Vorgang. Falls ein Segment einen grösseren Wert hat als der noch zur Verfügung stehende Dividend, verschiebe das Segment um eine Zeile nach unten.



Das gelbe Segment ist wertmässig zu gross, deshalb wird es eine Zeile nach unten verschoben.



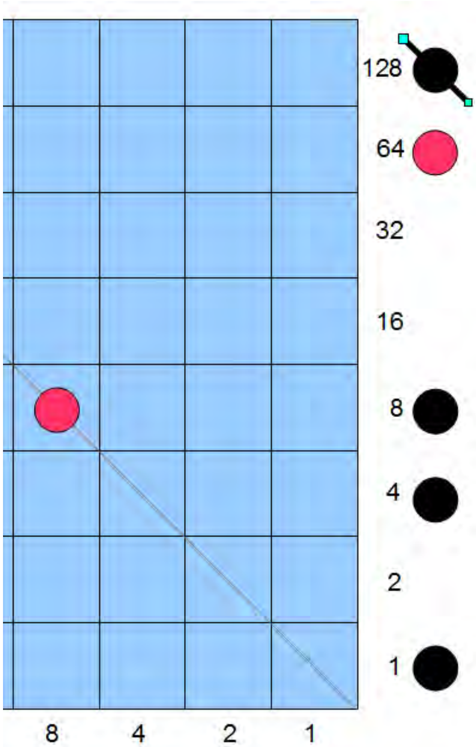
Die Zahl 16 beim Dividenden kann man mit zweimal 8 bereinigen, da ein bereits bestehendes Segment erzeugt wird. Von 8 aus erhält man das unterste Segment.

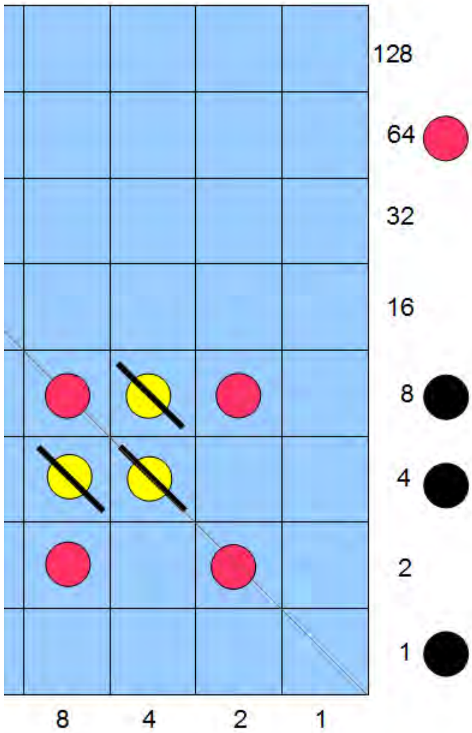
g) Wurzelziehen

Vorgehen: $\sqrt{141} = 11$ Rest 20

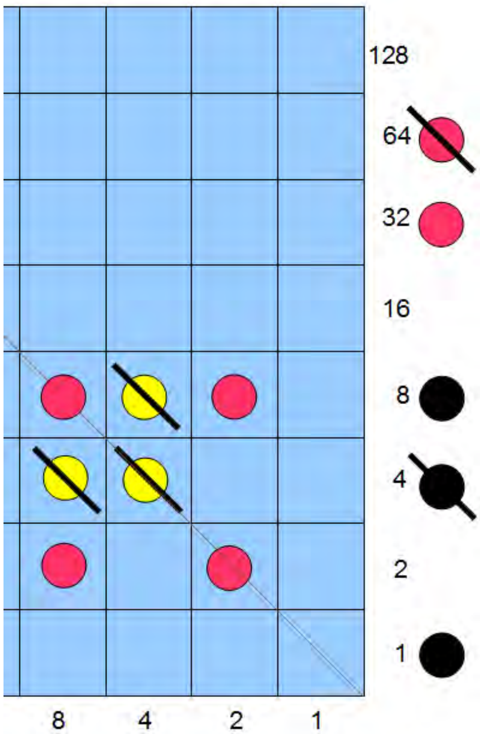
- Plaziere den Radikanden am Rand rechts ausserhalb des Rechenbrettes.
- Setze eine Marke auf das Quadrat mit dem grössten Wert, welcher im Radikanden enthalten ist (Die Quadratzahlen liegen auf der Diagonalen von rechts unten nach links oben). Dieses Feld nennt Napier den *Kopf der Gnomone*. Bestimme den Rest von Radikand minus Kopf und stelle ihn rechts dar.
- Füge den ersten Dreier-Gnomon beim Kopf an und bestimme den Wert. Ist er grösser als der verbleibende Rest, so setze die drei Marken auf den Fünfer-Gnomon. Sonst lasse die drei Marken stehen.
- Wieder den Rest bestimmen, rechts darstellen und den nächsten Gnomon ansetzen usw.

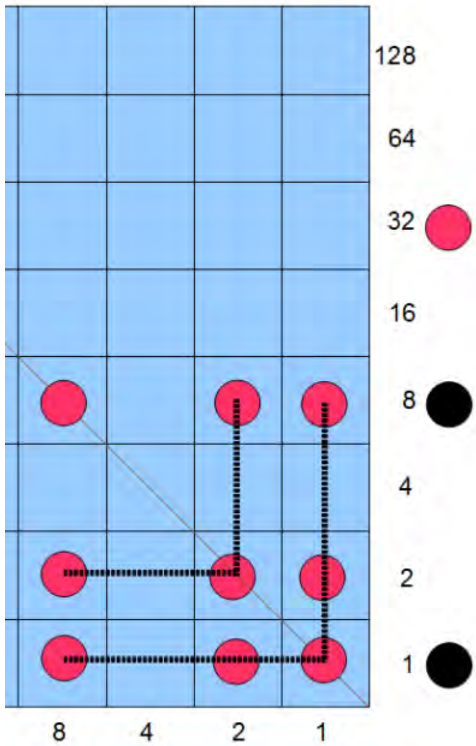
Merke: Was für die Division die Segmente, sind für das Wurzelziehen die Gnomone!





Der gelbe Gnomon ist wertmässig zu gross, deshalb wird der nächste Dreier-Gnomon genommen.





$41 - 21 = 20$ Rest.

Der Wurzelwert kann bei der Seite des grössten Gnomons abgelesen werden:

$8 + 2 + 1 = 11$.
Beachte: Die entstehende Figur ist symmetrisch bezüglich der Diagonalen von rechts unten nach links oben und bildet ein Quadrat. Wie es sein muss, enthalten die Quadratseiten eine identischer Belegung mit Marken.

h) Ausblick

Für alle Operationen gilt: Das Verschieben auf dem Rechenbrett ist jeder Beschreibung überlegen! Mit wenig Übung erreicht man eine grosse Fertigkeit.
Sinngemäss lassen sich das Rechenbrett und die Regeln für eine beliebige Basis einrichten, aber das Zweiersystem besticht durch grosse Einfachheit.
Sogar mit der Basis -2, den sogenannten negabinären Zahlen, kann mit dem Rechenbrett gearbeitet werden. Dieses Zahlensystem erlaubt, sämtliche ganzen Zahlen mit 0 und 1 ohne Vorzeichen darzustellen.

Aktivitäten

1. Zeige die Richtigkeit der russischen Bauern-Multiplikation.
2. Welchen Faktor nimmt man bei der russischen Bauern-Multiplikation vorteilhaft für die Halbierungen?
3. Auf dem Rechenbrett von Napier sind an allen vier Ecken gewisse Zeichen. Was bedeuten sie?
4. Statt zu subtrahieren, kann man auch das Komplement des Subtrahenden addieren. Wie funktioniert dies auf dem Rechenbrett?
5. Beweise Napier's Art mechanisch zu multiplizieren.
6. Napier war stolz auf sein Rechenbrett. Gibt es von Hand eine Methode, die Quadratwurzel zu ziehen, welche schneller ist als jene von Napier?
7. Überlege die Multiplikation im Dreiersystem auf dem Rechenbrett.
8. Erstelle ein Notebook mit *mathematica*, um mit negabinären Zahlen arbeiten zu können.