

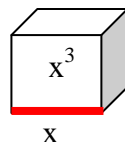
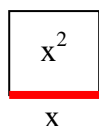
Algorithmus

Albert A. Gächter

Dem Computer wird heute ein Platz im ganzheitlichen Lern- und Arbeitsprozess zugewiesen. Im Folgenden soll der Versuch unternommen werden, dies am Beispiel des **Wurzelziehens** nachzuweisen. Im Blickpunkt stehen zwei Zielsetzungen:

1. ALGORITHMEN sind fundamentale Ideen der Mathematik und Informatik. Sie spielen eine entscheidende Rolle in vielen Themen der Sekundarstufe I und II. Zur Illustration eignen sich Wurzeln hervorragend.
2. Es mag für die Lehrperson von Nutzen sein, viele Komponenten des Wurzelziehens und weitere Anregungen dazu in einer Art **roten Faden** vorgestellt zu bekommen.

Ausgangspunkt bilden die Potenzen x^2 und x^3 . Veranschaulicht heisst dies, dass man von der Seitenlänge eines Quadrates oder eines Würfels zum Flächeninhalt und Volumen gelangt:



Quadratwurzelziehen bedeutet, dass man vom Flächeninhalt eines Quadrates zur Seitenlänge zurückkehrt.

Kubikwurzelziehen heisst, dass man vom Volumen eines Würfels zur Seitenlänge kommt.

Wurzelziehen zeigt sich damit eindrücklich als eine Umkehrung des Potenzierens. Schöne Einstiege in die „Wurzelproblematik“ bilden zwei Verdoppelungsaufgaben aus der Antike:

Quadratverdoppelung (Platons Menon, 82d-83b):

Die Seele ist unsterblich und weiss daher schon alles, aber bei der Geburt vergisst sie scheinbar alles. Lernen besteht in einer Wiedererinnerung. Menon zweifelt an dieser Lehre. Sokrates nimmt einen ungebildeten Sklaven und beweist seine These an ihm. Er legt ihm zwei Quadrate vor, eines mit der doppelten Fläche des andern. Wie lang wird die Seite des doppelten Quadrates sein, wenn das kleinere eine Seitenlänge von zwei Fuss besitzt?

Würfelverdoppelung (Delisches Problem):

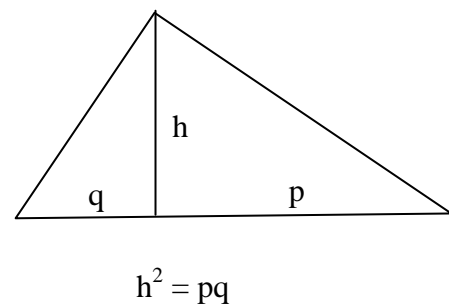
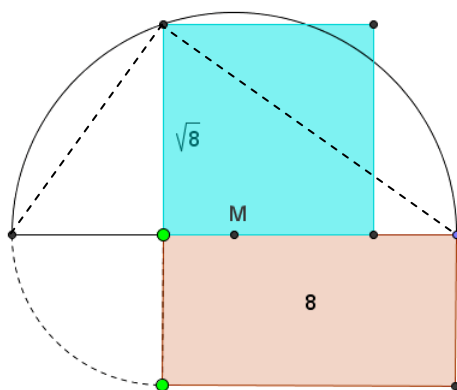
Nach der Legende wütete ca. 400 v.Chr. auf der Insel Delos die Pest. Wie immer in solchen schwierigen Situationen befragte man das Orakel in Delphi, was zu tun sei. Dort wurden sie aufgefordert, den würfelförmigen Altar im Apollo-Tempel im Volumen zu verdoppeln. Für Mathematiker bedeutete dies damals, dass die Seitenlänge eines Würfels mit dem doppelten Volumen unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal konstruiert werden sollte. Dies gelingt jedoch nicht. Daher ist das „Delische Problem“ unlösbar und Seuchen sind deshalb bis heute noch nicht verschwunden...

Die Lösung $\sqrt{8}$ der Quadratverdoppelung lässt sich berechnen und mit Zirkel und Lineal konstruieren, die Lösung $\sqrt[3]{2}$ der Würfelverdoppelung berechnen, jedoch nur mit zusätzlichen Hilfsmitteln konstruieren. Wie kommt man zu diesen Wurzelwerten? Wir zeigen dies mit *geometrischen* und anschließend *rechnerischen* Methoden.

a) geometrisch

Der **Höhensatz** besagt, dass das Höhenquadrat gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte ist. Damit lässt sich ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat umwandeln.

Für $\sqrt{8}$ sieht das wie folgt aus:



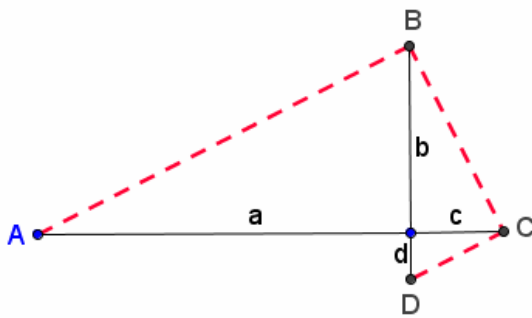
Für die Konstruktion von $\sqrt{8}$ eignet sich ein Rechteck mit den Seiten 2 und 4 oder mit 1 und 8. In diesem speziellen Fall hätte die Diagonale in einem Quadrat mit der Seitenlänge 2 den Dienst auch getan.

Der Höhensatz stellt eine allgemeine Methode dar. Mit ihm kann man die Wurzel aus jeder vorgegebenen Strecke konstruieren. Ist nämlich eine Strecke der Länge a gegeben, so wählt man sinnvollerweise ein Rechteck mit den Seiten 1 und a .

In dieser Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat ist die Idee der **mittleren Proportionale** versteckt. Da $pq = h^2$ gilt, ergibt eine Umformung die Darstellung $p:h = h:q$. Dabei bezeichnet man h als die mittlere Proportionale von p und q . Aber h wird auch \sqrt{pq} d.h. h ist das geometrische Mittel von p und q . Setzt man nun $q=1$, so ergibt $h = \sqrt{p}$, d.h. die mittlere Proportionale entspricht gerade dem gesuchten Wurzelwert.

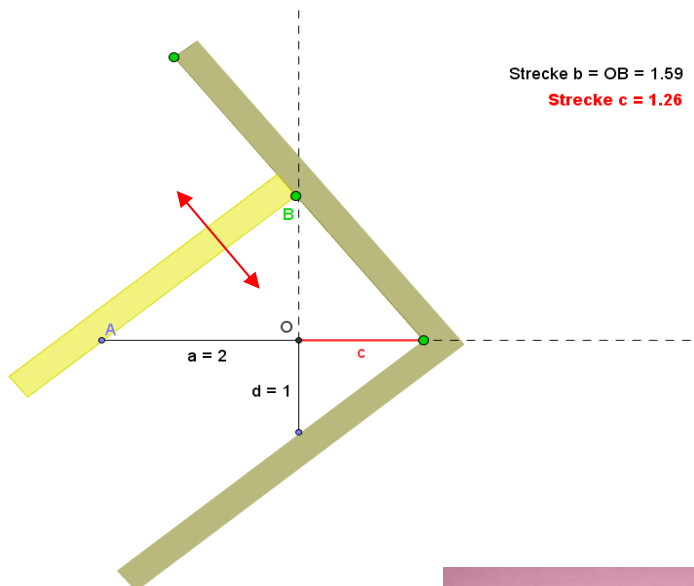
Kubikwurzeln sind etwas härter im Nehmen. Die Griechen verwendeten spezielle Kurven oder behelfen sich mit ausgeklügelten mechanischen Geräten. Hippokrates soll als erster das Problem der Würfelverdoppelung mit der Bestimmung **zweier mittlerer Proportionalen** gelöst haben. Interessanterweise zeigt sich das Ziehen einer Kubikwurzel als Verallgemeinerung der mittleren Proportionalen. In $a:b = b:c = c:d$ sind b und c die mittleren Proportionalen zu a und d .



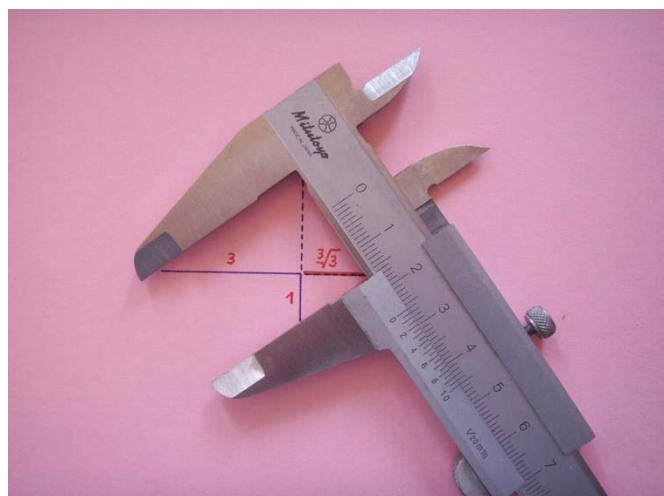


$$\sqrt[3]{a} = c \text{ (für } d = 1\text{)}$$

Erfüllen die 4 Strecken a, b, c und d die obige Bedingung, so sind die drei rechtwinkligen Dreiecke ähnlich und es liegt bei B und C ein rechter Winkel vor. Mit den Dreiecken ACB und BDC kann man zwei Höhensatzfiguren ausfindig machen. Falls zwischen den gegebenen Strecken a und d die mittleren Proportionalen b und c bestimmt werden sollen, hilft das mechanische Gerät, die 90°- Winkel zu finden.



Strecke b = OB = 1.59
 Strecke c = 1.26



Eine Schublehre leistet dasselbe!

Bei der Würfelverdoppelung gilt für die Seitenlänge $c = \sqrt[3]{2}$ oder $c^3 = 2$.
 Wählt man $a=2$ und $d=1$, so ergibt sich $2 : b = b : c = c : 1$. Da $b = c^2$ folgt sofort $c^3 = 2$.

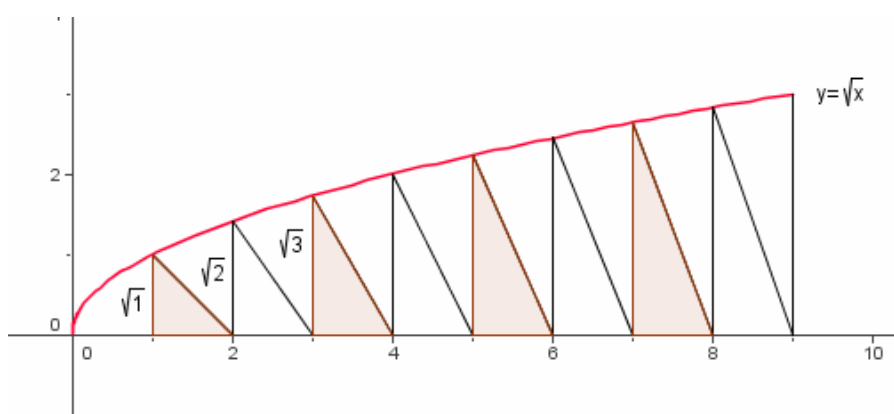
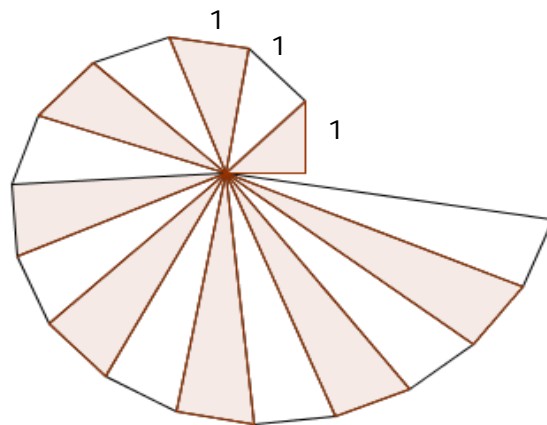


Für die $\sqrt[3]{a}$ setzt man also an die Strecke a senkrecht dazu die Strecke $d=1$. Der Winkelhaken mit dem beweglichen gelben Teil wird so eingepasst, dass die parallelen Teile durch den Anfangspunkt von a und den Endpunkt von d laufen und die Scheitel der rechten Winkel auf der Verlängerung von a und von d liegen.

Das Gerät wird Platon zugeschrieben. Dieser hat mit der Erfindung dieses Werkzeuges nichts zu tun. Eher kommt die Schule um Menaichmos in Frage.

Benötigt man lediglich die Wurzeln aus natürlichen Zahlen, kann auch der Satz des Pythagoras nützlich sein. Die **Wurzelspirale** entsteht ausgehend von einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 1 durch das Anfügen weiterer rechtwinkliger Dreiecke. Die abgetragene Kathete besitzt stets die Länge 1. Die Hypotenusen haben der Reihe nach die Längen $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots$. Die erste Umdrehung wird nach 17 Dreiecken vollendet, die zweite nach 54, die dritte nach 110 usw.

Um die $\sqrt{41}$ zu konstruieren, kommt die Wurzelspirale natürlich nicht in Frage. Oft hilft ein gut gewähltes rechtwinkliges Dreieck, in unserem Fall eines mit den Katheten 4 und 5. Der Höhensatz löst das Problem ebenfalls.

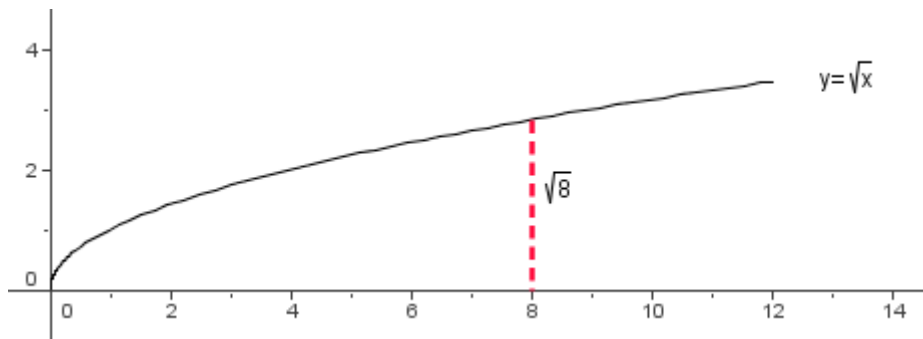


Schneidet man die rechtwinkligen Dreiecke der Wurzelspirale aus und ordnet sie auf der x -Achse an, so liegen die Punkte auf der Quadratwurzelkurve.

Mit einer archimedischen Spirale lässt sich die Wurzelspirale annähern.

Quadrieren und Wurzelziehen sind Umkehroperationen zueinander. Dies widerspiegelt sich auf Funktionenebene bei den Kurven $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$. Sind die Kurven gezeichnet, kann graphisch die Wurzel gezogen werden.

Wurzelfunktion:



b) rechnerisch

Bereits einfache **Taschenrechner** besitzen eine Quadratwurzeltaste und eine weitere für höhere Wurzeln. Worauf basiert sein Wurzelziehen? Seit den Zeiten des legendären HP35 im Jahre 1972 kommt das **CORDIC-Verfahren** zum Zuge. Dieser Algorithmus ist in der Lage, nicht nur Wurzeln, sondern auch trigonometrische Ausdrücke usw. zu berechnen. Für die Sekundarstufe I fehlen den Schülerinnen und Schülern aber die Grundlagen, um das Verfahren ganz zu verstehen. Am Gymnasium lohnt es sich, die Ideen des CORDIC-Algorithmus kennen zu lernen.

Eine aufwendige, aber stets ausführbare Methode bildet die **Intervallschachtelung**. Bei diesem „Sandwich-Verfahren“ liefert jeder Schritt eine einzige weitere gültige Stelle des Resultates.

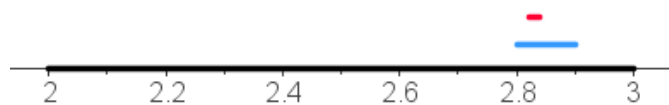
$$2 < \sqrt{8} < 3$$

$$2.8 < \sqrt{8} < 2.9$$

$$2.82 < \sqrt{8} < 2.83$$

$$2.828 < \sqrt{8} < 2.829$$

...



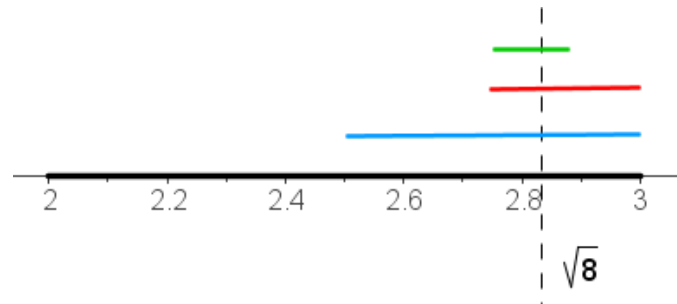
Diese Schachtelung kennt man von gewissen Hochzeitspaketen: In einer grossen Schachtel befindet sich eine kleinere, darin wieder eine kleinere usw. Um zur zweiten Zeile zu gelangen, probiert man mit dem Taschenrechner zum Beispiel, ob 8 zwischen 2.7^2 und 2.8^2 oder zwischen 2.8^2 und 2.9^2 liegt. Die Intervalllänge nimmt von 1 auf jeweils einen Zehntel der vorherigen Länge ab. Die linken Intervallgrenzen besitzen bereits lauter richtige Stellen.

Analog funktioniert die Intervallschachtelung für die Kubikwurzeln.

Eine spezielle Art der Schachtelung von Intervallen bietet das **Halbierungsverfahren (Bisektion)**. $\sqrt{8}$ liegt zwischen 2 und 3. Dieses Intervall wird halbiert. Nun befindet sich



$\sqrt{8}$ in der rechten Hälfte, da $2.5^2 = 6.25 < 8$ ist. Also wird das Intervall zwischen 2.5 und 3 wiederum halbiert usw. Dabei kommt das arithmetische Mittel der Intervallrandpunkte zum Zug.



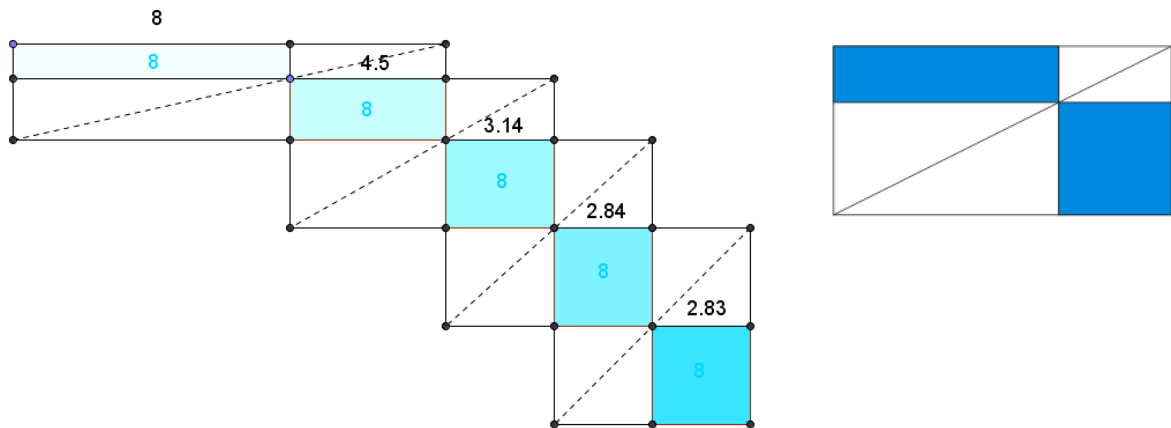
Um ca. 100 nach Chr. lebte Heron von Alexandria. Das nach ihm benannte **Heron-Verfahren** zur Bestimmung von Wurzeln war schon den Babyloniern in groben Zügen bekannt. Neben dem Euklidischen Algorithmus gehört derjenige von Heron daher zu den ältesten. Wegen seiner Effizienz und Einfachheit ist er auch heute noch aktuell und interessant.

Eine kleine Änderung der Perspektive macht die Methode sehr anschaulich. Die $\sqrt{8}$ zu ziehen bedeutet dasselbe, wie die Zahl 8 in zwei gleiche Faktoren zu zerlegen. Dies gelingt bei Nichtquadratzahlen natürlich nicht auf Anhieb. Eine erste Näherung könnte 2 sein, da 2 mal 4 gleich 8 ist. Grundidee: durch das arithmetische Mittel von 2 und 4 wird eine bessere Näherung erreicht: 8 ist gleich 3 mal 2.67. Die beiden Zahlen sind bereits wertmässig näher aneinander gerückt. Für eine Automatisierung mit einer Tabellenkalkulation drängt sich als Startwert die Näherung 1 auf, da er stets gewählt werden kann. Die Kolonne Check kontrolliert, wie viel das Quadrat der Näherung ergibt.

	A	B	C	D	E
1	Quadratwurzel (Methode von Heron)				
2					
3	Idee: bessere Näherung durch das aM (geometrisch: vom Rechteck zum Quadrat).				
4					
5	Radikand	Näherungswert	Rad./Näh.	aM	Check
6					
7	8	1	8	4.5	20.25
8		4.5	1.777777778	3.138888889	9.852623457
9		3.138888889	2.548672566	2.843780728	8.087088827
10		2.843780728	2.813156416	2.828468572	8.000234462
11		2.828468572	2.828385678	2.828427125	8.000000002
12		2.828427125	2.828427124	2.828427125	8
13		2.828427125	2.828427125	2.828427125	8
14					
15					
16					
17	HERON				
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					

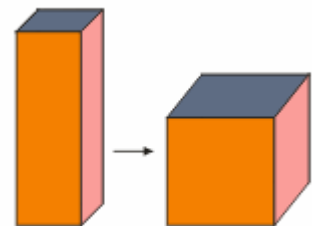
Eine geometrische Veranschaulichung zeigt sehr schön den Weg vom Rechteck zum Quadrat (Die Rechteckflächen bleiben wegen der Anwendung des Ergänzungsparallelogramms immer gleich gross.):





Der Heronsche Algorithmus liefert bereits nach wenigen Schritten einen guten Näherungswert. Die gute Botschaft lautet, dass der „Heron“ ebenfalls für Kubikwurzeln einsetzbar ist. Da man bei Kubikwurzeln den Radikanden in drei gleiche Faktoren zerlegen muss, läuft die Veranschaulichung vom Quader zum Würfel. Nimmt man einen quadratischen Quader, vereinfacht man das Verfahren. Für die $\sqrt[3]{2}$ heisst dies: $2 = 1 \cdot 1 \cdot 2$. Das arithmetische Mittel dieser drei Zahlen ist $4/3$ usw.

	A	B	C	D	E
1	Kubikwurzel (Methode von Heron)				
2					
3	Idee: bessere Näherung durch das aM (geometrisch: vom quadratischen Quader zum Würfel).				
4					
5	Radikand	Näherungswert	Rad./Näh. ²	aM	Check
6					
7	2	1	2	1.333333333	2.37037037
8		1.333333333	1.125	1.263888889	2.018955225
9		1.263888889	1.252022703	1.259933493	2.000059259
10		1.259933493	1.259896163	1.25992105	2.000000001
11		1.25992105	1.25992105	1.25992105	2
12		1.25992105	1.25992105	1.25992105	2
13					
14	HERON				
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					

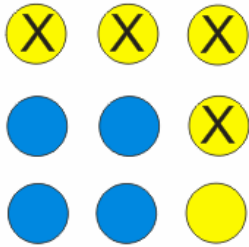


Auch auf höhere Wurzeln ist der Heron übertragbar.

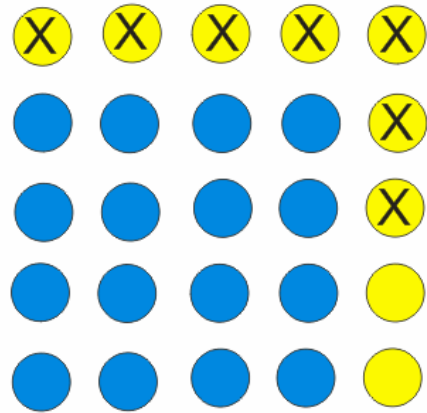
Eine hübsche, wenn auch etwas eigenartige Methode ergibt sich, wenn man **Figurenzahlen** zu Hilfe nimmt. Für die Quadratwurzeln eignen sich die Quadratzahlen, für die Kubikwurzeln die Würfelzahlen. Je grösser der Radikand, desto genauere Resultate darf man erwarten.



Ausgangspunkt ist die Tatsache, dass jede Quadratzahl aus der vorhergehenden durch Anhängen eines Winkelhakens (Gnomon) entsteht. So ist z.B. $25 = 16$ (blau) + 9 (gelb). Die Zahl 23 setzt sich demnach aus 16 blauen und 7 gelben Spielsteinen des Gnomons zusammen.



$$\sqrt{8} \approx 2 + \frac{4}{5} = 2.8 \quad (\text{TR: } 2.83)$$

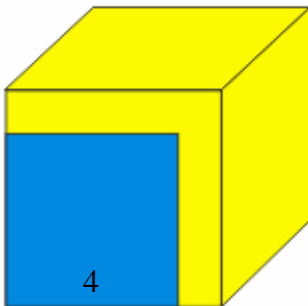


$$\sqrt{23} \approx 4 + \frac{7}{9} = 4.778 \quad (\text{TR: } 4.796)$$

$$\sqrt{25} = 4 + \frac{9}{9} = 5$$

Die Würfelzahlen lauten $1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots$. Für $\sqrt[3]{72}$ ergibt sich 4 als Seitenlänge des 64 er Würfels. Vom nächst grösseren Würfel benötigen wir noch 8 von 61 Kugeln.

$$\text{Also: } \sqrt[3]{72} \approx 4 + \frac{8}{61} = 4.13 \quad (\text{TR: } 4.16)$$



Im gelben Restkörper (Gnomon) befinden sich $125 - 64 = 61$ Kugeln. Von diesen brauchen wir noch 8 gelbe, da wir schon 64 blaue haben.

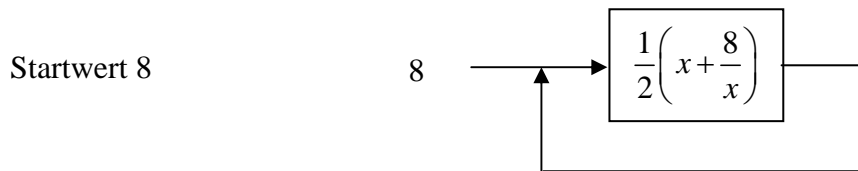
Schöne Übungen in Sachen Näherungen und Fehlerrechnung sind hier möglich!

Das Heronverfahren hat auch im Bereich der Funktionen und Iterationen etwas zu bieten. Im Zusammenhang mit dynamischen Systemen (Chaos, Fraktale) sind **Rückkoppelungsprozesse** interessant. Schaut man beim „Heron“ für die Berechnung von $\sqrt{8}$ genauer hin, so erhält man die Näherungen nach folgender Formel:

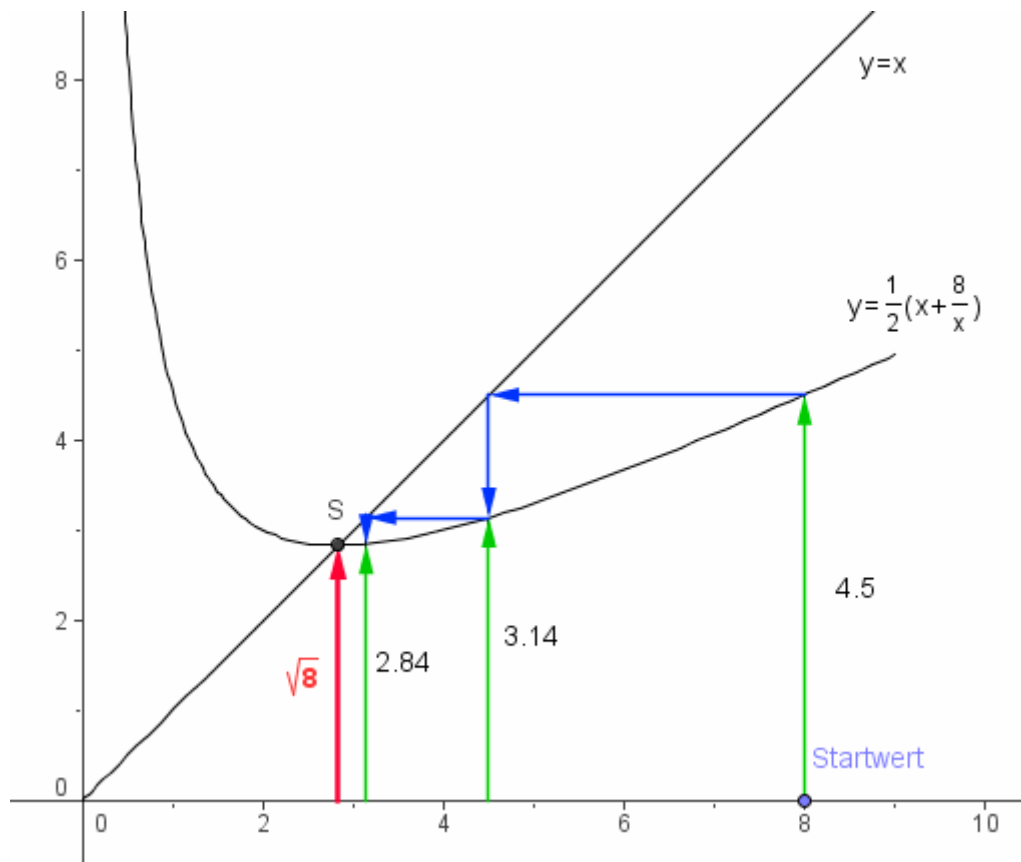


$$x_{neu} = \frac{1}{2} \left(x_{alt} + \frac{8}{x_{alt}} \right)$$

Mit dem Startwert $x_1 = 8$ werden $x_2 = 4.5$, $x_3 = 3.14$, $x_4 = 2.84$ und $x_5 = 2.83$ (vergleiche oben im Tabellenkalkulationsblatt). Als Rückkoppelungsmaschine interpretiert, sieht das so aus:



Jeder Output wird sofort wieder eingespeist. Was leistet diese Maschine? Sie liefert die Wurzel aus 8 umso genauer, je länger man sie laufen lässt. $\sqrt{8}$ ist ein sog. Fixpunkt des Prozesses. Es ist üblich, den Sachverhalt graphisch darzustellen.



Die

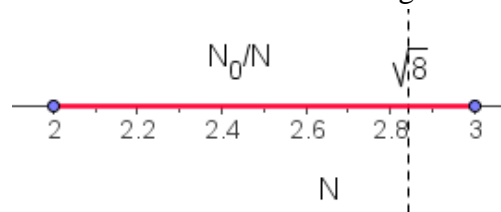
Rückkoppelungsmaschine berechnet einige y-Werte der Kurve $y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{8}{x} \right)$. Jeder

grüne ermittelte y-Wert wird wieder zu einem neuen Inputwert x. Mit der Geraden $y = x$ kann der Prozess zeichnerisch eleganter durchgeführt werden, indem man den Weg der blauen Pfeile nimmt. Der grüne „Outputwert“ 4.5 müsste sonst wieder auf der x-Achse als „Inputwert“ erscheinen. Die grünen Pfeillängen nähern sich offensichtlich sehr schnell der roten Pfeillänge, nämlich $\sqrt{8}$.

Die Kurve $y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{8}{x} \right)$ kann als Zusammensetzung der Geraden $y = \frac{1}{2}x$ und der Hyperbel $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x} = \frac{4}{x}$ verstanden werden. Solchen Kurven begegnet man bei der Proportionalität und der umgekehrten Proportionalität.

Mathematik betreiben heisst auch, immer wieder Gleichungen zu lösen. Der Wert $\sqrt{8}$ ergibt sich als eine Lösung der **Gleichung** $x^2 - 8 = 0$.

Es gelingt auch mit einem Zufallsgenerator, $\sqrt{8}$ näherungsweise zu berechnen. Man lässt N Zufallszahlen auf das Intervall zwischen 2 und 3 niederprasseln. Für jede Zahl wird getestet, ob ihr Quadrat grösser oder kleiner als 8 ist. Es seien N_0 Zahlen von den N so beschaffen, dass ihr Quadrat kleiner als 8 ist. Dann entspricht N_0/N näherungsweise der Intervalllänge $\sqrt{8} - 2$. Der gesuchte Wert für $\sqrt{8}$ ist dann ungefähr $2 + N_0/N$. Für zwei Stellen nach dem Komma reichen einige Tausend Zufallszahlen.



Solche Simulationen tragen den Namen **MonteCarlo** in Anlehnung an das Eldorado für Glücksspieler.

	A	B	C	D	E	F	G
1	MonteCarlo für die Quadratwurzel aus 8						
2							
3	Zufallszahlen	Test		Anzahl 0:	8294		
4	zwischen 2 und 3			Anzahl 1:	1707		
5							
6	2.837300079	1		Näherung	2.8293		
7	2.565993888	0			2.8284		
8	2.583029847	0					
9	2.147453729	0					

Die Palette der Möglichkeiten hält noch weitere Rosinen bereit.

In der Schule werden die **Kettenbrüche** sehr stiefmütterlich behandelt, was bedauerlich ist. Sie liefern für die meist irrationalen Wurzeln ausgezeichnete rationale Näherungswerte. Beispiel für $\sqrt{8}$ (ohne Herleitung):



$$\begin{array}{r}
 \swarrow \\
 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}
 \end{array}$$

Man schreibt den Kettenbruch kurz als:

$$[2; 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots]$$

Interessanterweise taucht die Periodizität, die wir von der Dezimaldarstellung rationaler Zahlen her kennen und bei irrationalen Quadratwurzeln vermissen, hier auf!

Bricht man nach einer Anzahl von Brüchen ab, ergeben sich der Reihe nach folgende Näherungswerte:

$$2, 3, \frac{14}{5}, \frac{17}{6}, \frac{82}{29}, \frac{99}{35}, \frac{478}{169}, \frac{577}{204}, \frac{2786}{985}, \frac{3363}{1189}, \frac{16238}{5741}$$

Irrationalität von $\sqrt{8}$

Bekannt ist der klassische (indirekte) Beweis für die Irrationalität der Wurzel aus 2. Seit der Antike gibt es neben diesem algebraischen Beweis auch ein geometrisches Verfahren. Es heisst **Wechselwegnahme** und zeigt, dass es für die Quadratseite und die zugehörige Diagonale kein gemeinsames Mass gibt. Es ist unmöglich, eine (noch so kleine) Strecke zu finden, welche in beiden genannten Strecken ohne Rest aufgeht. Quadratseite und Diagonale sind demnach *inkommensurabel*. Die Entdeckung dieser Tatsache stürzte die Pythagoräer in eine tiefe Krise. Sie waren davon ausgegangen, dass alles durch rationale Zahlen bzw. als Verhältnis von ganzen Zahlen beschrieben werden kann. Das Verhältnis von Seite zu Diagonale kann nicht durch einen Bruch ausgedrückt werden. Das Konzept „rationale Zahl“ zeigt seine Grenzen und braucht eine Erweiterung. Es wäre ein Verlust, solche produktiven Momente der Mathematikgeschichte im Unterricht auszulassen!

Die Wechselwegnahme erlaubt, das Argumentieren auch bei „indirekten“ Beweisen zu üben. Bemerkung: Da $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, ist die Wurzel aus 8 ebenfalls irrational, wenn $\sqrt{2}$ es ist. Daher sei der Algorithmus für $\sqrt{2}$ gezeigt.

Konstruktion:

Aus der Zeichnung entnimmt man, wie ausgehend vom Einheitsquadrat, eine Folge immer kleiner werdender Vierecke entsteht. Es ist eine schöne Übung zu zeigen, dass die Vierecke wieder Quadrate sind.

Wir zeigen, dass alle Quadratseiten und -diagonalen inkommensurabel zu AB und BD sind.

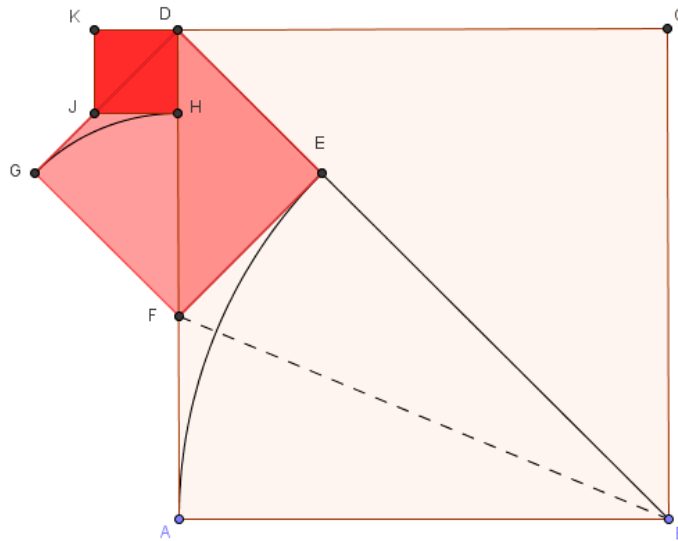
Annahme: **AB** und **BD** sind *kommensurabel*,

d.h. es gibt eine Strecke der Länge r, welche in der Quadratseite und -diagonale aufgeht, dh. $AB = mr$ und $BD = nr$ mit ganzzahligen m und n.

$$DE = BD - BE = BD - AB = (nr - mr) = (n-m)r.$$

→ Daher ist die neue Quadratseite **DE** ebenfalls ein Vielfaches von r und daher *kommensurabel* mit AB und BD.





AF und FE sind Tangentenabschnitte an den Kreis um B und deshalb gleich lang.

$$AF = FE = DE = (n-m)r$$

$$DF = AD - AF = mr - (n-m)r = (2mr - nr) = (2m-n)r$$

→ DF ist ebenfalls kommensurabel mit AB und BD. Es liegt ein neues kleineres Quadrat vor, dessen Seiten und Diagonalen mit denjenigen des ursprünglichen Quadrates kommensurabel sind.

Auf dieselbe Weise können beliebig viele kleinere Quadrate erzeugt werden, deren Seiten und Diagonalen mit dem gegebenen Quadrat kommensurabel sind.

So erhält man eine unendliche Folge immer kürzer werdender Strecken, die zugleich ganzzahlige Vielfache einer festen Strecke r sein müssen. Wir erhalten aber mit Sicherheit ein Quadrat, dessen Seitelänge kleiner als r ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch: Eine Quadratseite, welche kleiner als r ist, kann nicht ein ganzzahliges Vielfaches von r sein. Daher war die Annahme, dass AB und BD kommensurabel sind, falsch. Demzufolge kann nur das Gegenteil richtig sein. Dies war zu beweisen.

Der Name Wechselwegnahme rührt übrigens davon her, dass man abwechslungsweise der Diagonale und der Seite etwas wegnimmt.

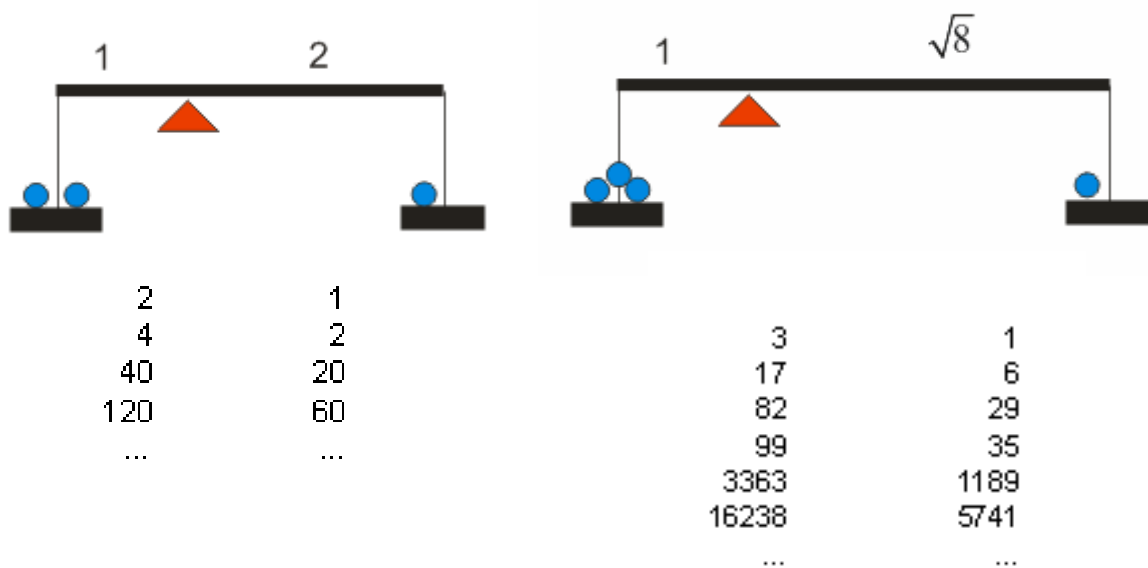
Ein wenig bekanntes, aber sehr eindrückliches *Gedankenexperiment* (Idee: M. Gazalé) zur Problematik der Inkommensurabilität sei hier noch angefügt. Das Hebelgesetz besagt, dass bei einer Waage Gleichgewicht herrscht, wenn Gewichte angehängt werden, welche umgekehrt proportional zu den Längen der Hebelarme sind. Annahme: Wir besitzen eine Riesenzahl kleiner Kügelchen von demselben Gewicht, welche wir in die beiden Schalen legen können.

Im Fall 1 seien die Hebelarme 1 und 2 Einheiten lang, im Fall 2 aber 1 und $\sqrt{8}$ (Diagonale in einem Quadrat mit der Seitelänge 2 Einheiten).

Fall 1:

Gleichgewicht ist auf beliebig viele Arten erreichbar. Die Anzahl der Kügelchen in beiden Waagschalen muss sich nur im Verhältnis 2:1 befinden.





Fall 2:

Gleichgewicht kann nie erreicht werden. Das Verhältnis der Kugeln lässt einmal die linke, das andere Mal die rechte Waagschale sich senken, da das Verhältnis nie exakt $\sqrt{8}$ wird (vergleiche die Näherungswerte beim Kettenbruch für $\sqrt{8}$).

Zusammenfassung

Beim Untersuchen der Wurzeln kommen verschiedenartige wichtige Algorithmen zum Zuge. Grosse Bedeutung erhält der Computereinsatz. Es zeigt sich eindrücklich, wie Mathematik als ein Netzwerk verstanden werden muss, mit Querbezügen und schönen Zusammenhängen. Der rote Faden fasst das zusammen, was in den Lektionen und den Lehrmitteln aus didaktischen Gründen verstreut liegt und erlaubt mit den Ergänzungen eine gewisse Gesamtschau der Problematik „Wurzeln“. Der Schwerpunkt liegt auf der Visualisierung und dem Verfahren von Heron, das in der Schule einen festen Platz bekommen sollte. Selbstverständlich darf nicht die Meinung aufkommen, all dies lehrgangmässig der Reihe nach zu behandeln.

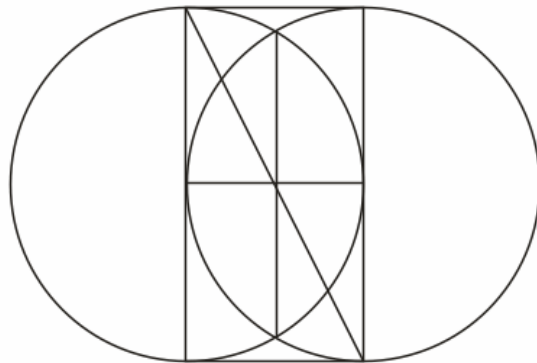
Aktivitäten

1. Taschenrechner-Übung: Berechne dritte Wurzeln nur mit Quadratwurzeln.
Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5} &= x \\ 5 &= x^3 \\ 5x &= x^4 \\ \sqrt{5x} &= x^2 \\ \sqrt{\sqrt{5x}} &= x \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt für das richtige x . Man beginnt nun mit einer Näherung, z.B. 1 und multipliziert mit 5, zieht die Wurzel, zieht die Wurzel und multipliziert wieder mit 5, zieht die Wurzel, zieht die Wurzel usw.

2. Bringe die Geschichte des Wurzelzeichens und des Namens „Algorithmus“ im Internet in Erfahrung.
3. Schlage nach: Geometrisches Mittel, Heron-Formel für die Dreiecksfläche, Körperdiagonale von Würfeln, goldener Schnitt, Kirchenfenster, Höhe im gleichseitigen Dreieck usw.
4. Für die Berechnung der Körperoberfläche eines Menschen gibt es verschiedene empirische Formeln (welche Wurzeln enthalten). Solche Formeln sind aus medizinischen Gründen wichtig. Suche solche im Internet und berechne die eigene Körperoberfläche.
5. Vesica (Fischblase) als Ausgangspunkt für viele Entdeckungen (Wurzelnest!). Die beiden kongruenten Kreise laufen gegenseitig durch die Mittelpunkte.



6. Studiere Silberne Rechtecke (Seitenverhältnis von 1 zu $1 + \sqrt{2}$) im Anschluss an die DIN-Papierformate.
7. Übe die Wechselwegnahme am regelmässigen Fünfeck.
8. Suche einen Beweis für die rasche Konvergenz des Heron-Verfahrens.
9. Stelle eine allgemeine Formel für die Berechnung der $\sqrt[k]{a}$ mit dem Heron-Verfahren auf.

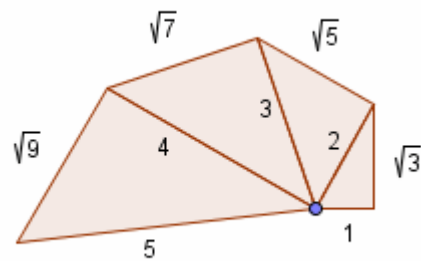
Lösung:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

10. Welche Seitenlängen besitzt die diagonale Schnittfläche im Einheitswürfel?
11. Lassen sich Wurzeln als Strecken auch durch Falten herstellen?



12. Jede ungerade Zahl ist die Differenz zweier aufeinander folgender Quadratzahlen (z.B. $9 = 25 - 16$). Daraus lässt sich eine Wurzelspirale ganz anderer Art gewinnen. Diskutiere!



13. Die Jongleur-Folge von Pickover (\rightarrow Internet) gibt eine gute Gelegenheit, das Wurzelrechnen zu üben.
14. Lassen sich Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen? Diskutiere!
15. Studiere die Wurzelproblematik im Bereich der komplexen Zahlen. Welche Bedeutung haben die Einheitswurzeln?

...